

# レーダー雨量計を利用した降雨の 実時間予測と実時間流出予測手法

椎 葉 充 晴

## 1. はじめに

洪水災害を防止・軽減する上で、豪雨や洪水流出の実時間予測は重要な役割を担っている。洪水防御のための施設整備がすぐには望めなくても、実時間予測技術の進展によって、ダム操作・避難・水防活動を効果的に展開して洪水災害を軽減し得る可能性がある。ここで、実時間予測とは、現象が実際に起きている最中に、過去の知識と時々刻々得られる観測情報をもとに、現象の予測を逐次的に進めていくものである。

降雨・流出の実時間予測手法が発展してきた背景の一つに、アメダス・レーダ雨量計を始めとする水文気象観測技術、観測データの転送・処理システム、電子計算機の発展などの「即時的観測処理システム」の発展がある。こうした科学技術の発展を背景として、「カルマンフィルター」を始めとする情報処理・制御理論を応用した実時間予測理論がここ10年展開されてきた。本小文では、筆者が展開してきた研究を中心に降雨・流出実時間予測手法を概説する。

## 2. 降雨の実時間予測手法

### 2.1 降雨の短時間予測手法の現状

これまで、デジタルレーダデータを用いる様々の短時間降雨予測手法が開発されている[1, 2]。立平・牧野[3]は現在のレーダエコー図を700-mb面の風向・風速で移流させる方法を提案した。しかし、700-mb面のデータは6時間毎にしか得られないから、1～3時間先の降雨を予測するにはデータ不足である。レーダエコーの動きを追跡して降雨を予測する方法も提案されている。WilkとGray[4]のcentroid法もその一つである。しかし、複雑な気象状態では手の込んだ計算プログラムが必要で、小型の計算機での予測には向いていないといわれている。AustinとBellon[1]は、より簡明な方法を得るために、ある「移流ベクトル」に沿って降雨パターンが平行移動するものと仮定して、移流ベクトルを相互相関法によって求める方法を提案した。土木研究所で開発された雨域追跡法[5, 6, 7, 8]では、相互相関係数を算出する前にエコー図を2値化して、中規模の降水現象の動きに対応しようとしている。雨域追跡法による予測計算例はかなり蓄積されてきており、その精度評価も行われている。

筆者らが提案している予測モデル[9, 10]は、予測に用いる移流ベクトルを位置座標の一次式で設定するもので、雨域の平行移動、回転、せん断的歪み、膨張などを考慮することができる。平行移動に限らないこのような雨域の変形を考慮する方法については、筆者らより前に下垣ら[11]が検討しているが、

Lagrange 座標系で議論しているために変形のパラメタを求めるのに非線形探索問題を解く必要が生じている。変形テンソル法[12]は、雨域変形の点对を人為的に与えることでこの非線形探索問題を避けたものである。筆者らの方法では、Euler 座標系を用いるため、雨域変形のパラメタを求める問題を線形最小二乗推定問題として定式化することが可能となり、計算機によって容易に解けるという利点を持っている。

短時間降雨予測の手法として、移流拡散モデルによる森山・平野ら[13]の方法、仮想荷重法による日野[14]の方法なども提案されているが、前者はまだ5分後の予測を行っている段階にとどまっており、後者は適用例が少なく、実用にはまだ多くの課題があると考えられる。3次元レーダデータの利用については検討が開始されたばかりである[15]。

## 2.2 線形移流ベクトル・発達衰弱場をもつ移流モデル

レーダサイトを原点とする直角座標系  $(x, y)$  を地上にとり、点  $(x, y)$  における時刻  $t$  の降雨強度を  $z(x, y, t)$  と表す。

$z$  の時空間分布の変化が

$$\partial z / \partial t + u (\partial z / \partial x) + v (\partial z / \partial y) = w \quad (1a)$$

に従うものと仮定する。ただし、 $u, v, w$  は、現在までのデータから推定すべきパラメタ  $c_1, \dots, c_9$  を用いて、

$$\begin{aligned} u &= c_1 x + c_2 y + c_3 \\ v &= c_4 x + c_5 y + c_6 \\ w &= c_7 x + c_8 y + c_9 \end{aligned} \quad (1b)$$

と表されるものとする。 $(u, v)$  を移流ベクトル、 $w$  を発達衰弱項と呼ぶ。 $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$  とおくと、方程式(1)はベクトル  $(c_3, c_6)$  に沿った平行移動を表す。したがって、(1)式で記述されるモデルは、相互相関法で仮定されているモデルの拡張になっている。また、このモデルは、雨域の回転、せん断的歪み、膨張などを表すことができ、回転角速度  $\omega_{yx}$ 、せん断速度  $\gamma_{yx}$ 、 $x$  軸、 $y$  軸に沿った歪み速度  $e_x$ 、 $e_y$  は、 $c_1, \dots, c_9$  を用いて、 $\omega_{yx} = (-c_2 + c_4) / 2$ 、 $\gamma_{yx} = c_2 + c_4$ 、 $e_x = c_1$ 、 $e_y = c_5$  と表される。もちろん、実際の降雨分布パターンの変化はモデル(1)によって記述されるよりも複雑な変化をするが、あまり手の込んだモデルを考えると計算時間もかかって実時間予測には適さないことになる。

## 2.3 パラメタの推定法

(1b)式を(1a)式に代入し、項の順序を替えると、

$$(c_1 x + c_2 y + c_3) \partial z / \partial x + (c_4 x + c_5 y + c_6) \partial z / \partial y - (c_7 x + c_8 y + c_9) = -\partial z / \partial t \quad (2)$$

が得られる。このモデルを使って将来の降雨分布を予測するには、まず  $c_p$  の値を決定する必要がある。これらの値は現在までの降雨データから推定される。

$x$  方向に  $\Delta x$  間隔、 $y$  方向に  $\Delta y$  間隔でとった  $M \times N$  個の格子点  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,  $j = 1, \dots, N$  の上で、 $\Delta t$  間隔で、時刻  $t_k = t_0 + k \Delta t$ ,  $k = -K, -K+1, \dots, 0$  ( $K > 0$ ) のレーダ降雨強度が既知であるとする。ただし、 $t_0$  は現在時刻である。簡単のため、 $z(x_i, y_i, t_k)$  を  $z_{ijk}$  とかく。

点  $(x_i, y_j)$ , 時刻  $t_k$  について(2)式を考え、偏微分項を差分近似

$$\begin{aligned} [\partial z / \partial t]_{ijk} &= (z_{ij(k+1)} - z_{ijk}) / \Delta t \\ [\partial z / \partial x]_{ijk} &= (z_{(i+1)jk} - z_{(i-1)jk}) / 2\Delta x \\ [\partial z / \partial y]_{ijk} &= (z_{i(j+1)k} - z_{i(j-1)k}) / 2\Delta y \end{aligned} \quad (3)$$

でおきかえて、 $c_p$  に関する式

$$\begin{aligned} &(c_1 x_i + c_2 y_j + c_3) [\partial z / \partial x]_{ijk} \\ &+ (c_4 x_i + c_5 y_j + c_6) [\partial z / \partial y]_{ijk} \\ &- (c_7 x_i + c_8 y_j + c_9) = -[\partial z / \partial t]_{ijk} - \nu_{ijk} \end{aligned} \quad (4)$$

を作る。ただし、 $\nu_{ijk}$  は残差を表すために導入されたものであり、これまでの仮定が正しければ0になるべきものである。よって、残差平方和

$$J_c = \sum_{k=K}^{-1} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=2}^{N-1} \nu_{ijk}^2 \quad (5)$$

ができるだけ小さくなるように  $c_p$  を定めることが考えられる。この最小二乗推定問題は、 $c_p$  に関する連立一次方程式になる正規方程式を解いて得られる。

実際の計算では、計算機の記憶容量の点で、次に述べる方法が、正規方程式を構成しそれを解くよりも好ましく、予測スキームを効率的で柔軟なものにすることができる。まず、(4)式は未知のパラメタ  $c_p$  に関する観測式

$$\begin{aligned} &a_{ijk1} d_1 c_1 + a_{ijk2} d_2 c_2 + \dots + a_{ijk9} d_9 c_9 \\ &= b_{ijk} - \nu_{ijk} \end{aligned} \quad (6)$$

と考え得ることに注意する。ただし、 $b_{ijk} = -[\partial z / \partial t]_{ijk}$ ,  $a_{ijk1} = x_i [\partial z / \partial x]_{ijk}$ ,  $a_{ijk2} = y_j [\partial z / \partial x]_{ijk}$ , ... であり、 $d_p$  は(1b)式でパラメタ  $c_p$  を0に固定するとき0、そうでないとき1とさだめるものとする。 $J_c$  を最小とする  $c_p$  の値は、平方根情報フィルタ (SRIF) [16] によって求められる。

具体的な手順は次の通り。 $K \times (M-2) \times (N-2)$  の約数  $m$  を一つとって、固定しておく。

- 1)  $9 \times 10$ 次行列  $S$  を用意し、全ての成分を 0 とおく。 $I_c$  を 0 とおく。
- 2) それぞれの  $(i, j, k)$  の組合せに対して、 $1 \times 10$ ベクトル  $(a_{ijk1}d_1, \dots, a_{ijk9}d_9, b_{ijk})$  を作り、行列  $S$  の底に次々と追加していく。行列  $S$  の行の数が  $m+9$  になったら、行列  $S$  に Householder 変換を施して、 $S$  の最初の 9 列が次のような上三角行列

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{19} & S_{1,10} & & & & & \\ & S_{22} & \cdots & S_{29} & S_{2,10} & & & & & \\ & & \cdots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & S_{99} & S_{9,10} & & \\ & & & & & & & S_{10,10} & & \\ & & & & & & & \cdots & & \\ 0 & & & & & & & & & S_{m+9,10} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{matrix} S_{11} \\ S_{22} \\ \cdots \\ S_{99} \end{matrix}} \right\} 9 \text{ 行} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} S_{10,10} \\ \cdots \\ S_{m+9,10} \end{matrix}} \right\} m \text{ 行}$$

になるように変換し、 $I_c + \sum_{i=10}^{m+9} S_{i,10}^2$  を改めて  $I_c$  とおき、 $S$  の下  $m$  行を削除する。

- 3) 上記の処理を  $i = 2, \dots, M-1, j = 2, \dots, N-1, k = -K, \dots, -1$  について繰り返し、最後に

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{19} & & & & \\ & S_{22} & \cdots & S_{29} & & & & \\ & & \cdots & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & & & & S_{99} & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_9 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} S_{1,10} \\ S_{2,10} \\ \vdots \\ S_{9,10} \end{array} \right]$$

を解く。 $p = 9, 8, \dots, 1$  に対して順に、

$$c_p = \begin{cases} 0, & S_{p,p} = 0 \text{ のとき} \\ [S_{p,10} - \sum_{j=p+1}^9 S_{p,j}c_j] / S_{p,p} \end{cases} \quad (7)$$

とおけばよい。

この手順を終えたとき、最小二乗推定値(7)に対応する残差平方和  $J_c$  が  $I_c$  にセットされている。インデクス  $d_p$  が 0 にセットされていた場合には、 $c_p$  は 0 になる。したがって、パラメタ  $c_p$  の中のどれかを 0 に固定したい場合でも、別にプログラムを用意せず、ただインデクス  $d_p$  を操作すればよい。筆者ら[9]は、これを利用して、 $c_p$  の中で様々なパラメタを考慮する効果を分析している。

以下、プログラム中で行列  $S$  を記憶するための配列をフィルタ配列と呼び、同じ  $S$  で表す。

## 2.4 移流ベクトル・発達衰弱場の時間変化

降雨の予測計算を考察するまえに、建設省の深山レーダによって得られた台風8210号の降雨データ(元のPPIデータを、 $M=N=80$ ,  $\Delta x = \Delta y = 3.5$  km,  $x_1 = y_1 = -138.25$  kmとおいた $M \times N$ 個の格子点上,  $\Delta t = 5$  minの降雨データに変換)を用いて、移流ベクトル場・発達衰弱場の時間的変化

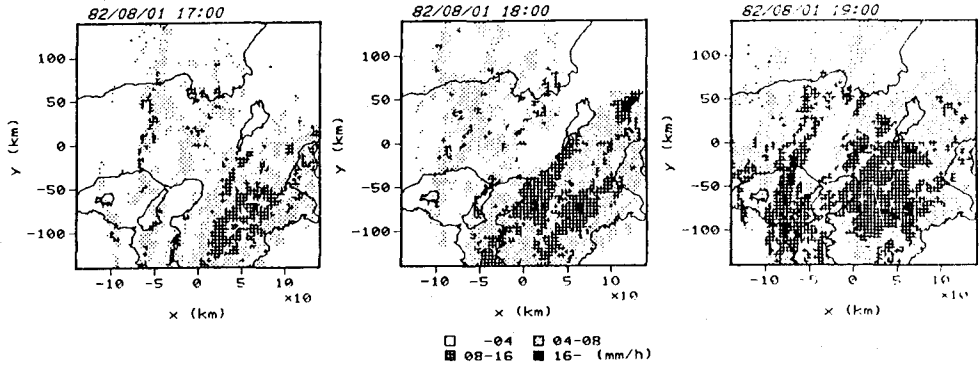


Fig. 1 Observed rainfall distribution at 17:00, 18:00 and 19:00, August 1, 1982.

の性質を検討する。Fig.1は、8月1日17:00, 18:00, 19:00の観測降雨強度分布, Fig.2は、上が17:00~18:00の、下が18:00~19:00の観

測降雨強度分布から同定した移流ベクトル・発達衰弱場を示す。同定された移流ベクトル・発達衰弱場は降雨強度分布の変化によく対応し、移流ベクトル・発達衰弱項の場所的変化を捉えている。モデル(1)では、移流ベクトル・発達衰弱項の時間変化は位置座標の一次式で表されるレベルでしか捉えられないが、逆にいえば少なくともこのレベルで移流ベクトル・発達衰弱項の場所的変化を考慮するのが望ましいことを示している。

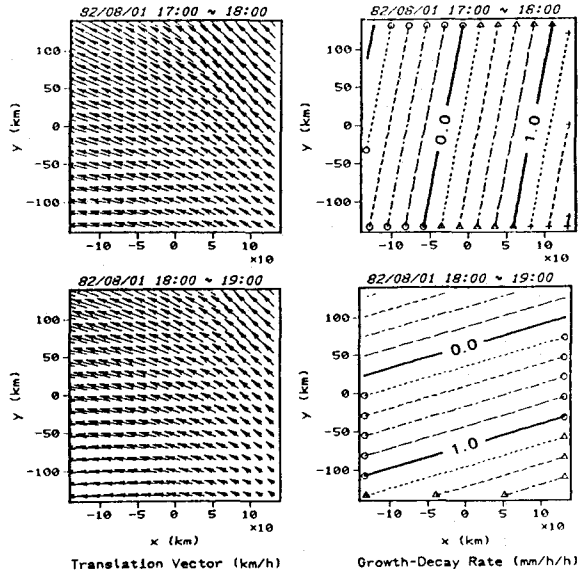


Fig. 2 Translation vector and growth-decay rate fields estimated from the data for 17:00 to 18:00.

次に、移流ベクトル・発達衰弱場の時間的変化の特徴をみるために、パラメタ $c_p$ を15分間隔,  $K=1$ で求めた。レーダサイトでの移流ベクトル成分 $u_0 = c_3$ ,  $v_0 = c_6$ , 回転角速度 $\omega_{yx} = (-c_2 + c_4)/2$ , 発達衰弱項の係数の時系列データとコログラムはFig.3のようであった。発達衰弱項の係数を除くといずれも持続性が高く、過去

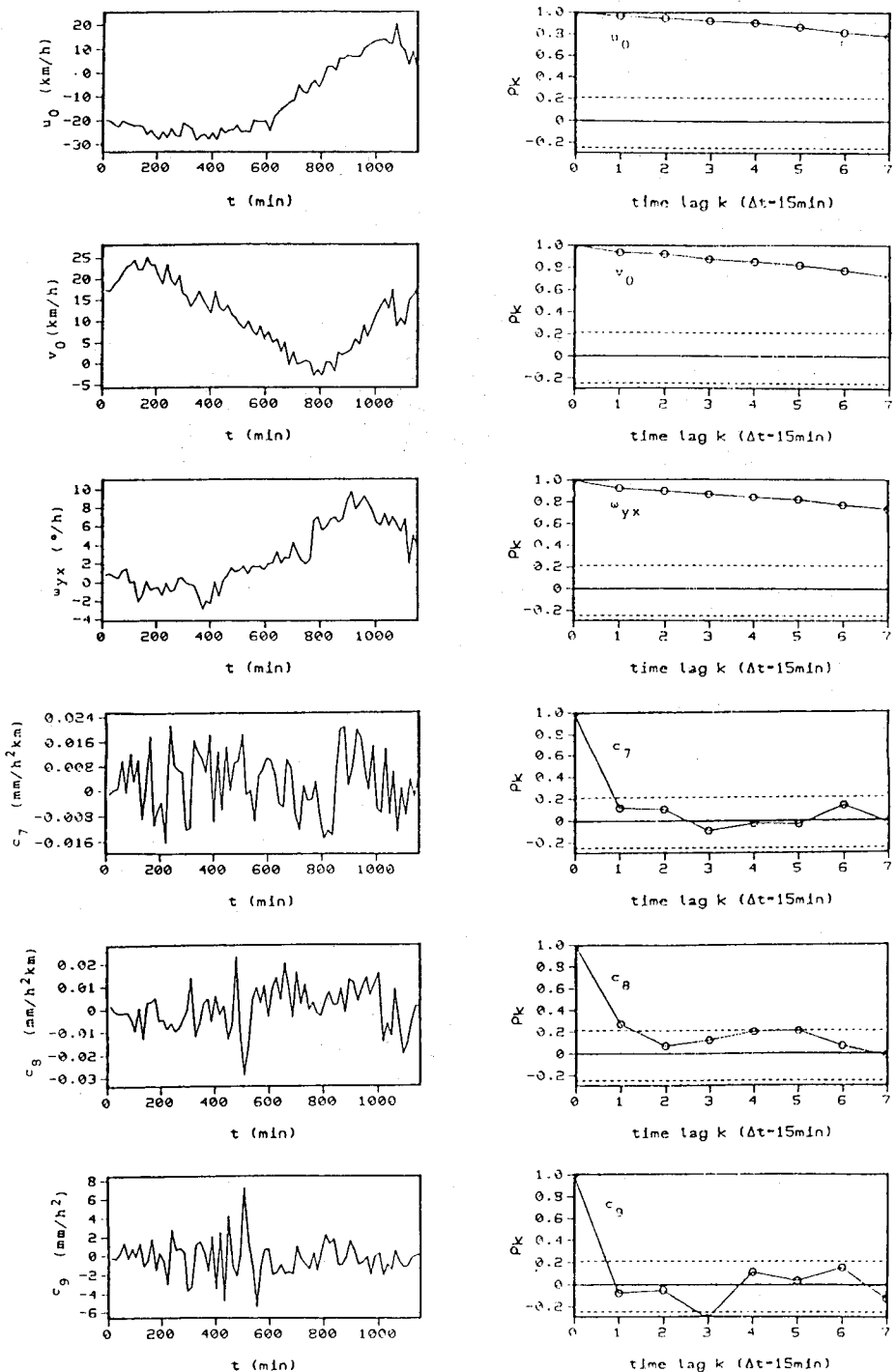


Fig. 3 Time plots of  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_{yx}$ ,  $c_7$ ,  $c_8$ , and  $c_9$  with their correlograms. The dotted lines show the 95% confidence limits of randomness.

のデータからこれらのパラメタを同定し予測に用いることを根拠づけているとみられる。ただし、時系

列そのものを見ても明らかなようにある傾向をもって推移しており、あまり長いメモリーで同定するのは好ましくないと言える。一方、発達衰弱項の係数は平均値0でほとんどランダムに推移している。これは、いまの方法では発達衰弱項の予測が困難であることを示している。土木研究所水文研究室[8]でも、発達衰弱項の外挿の可能性、その地形量、気象量との関連などを調査しているが、予測に用い得るような結果は得られていないようである。

## 2.5 降雨分布の予測

### (a) 特性曲線の追跡と降雨予測

パラメタ  $c_p$  の値が推定されれば、(1)式を用いて現在の降雨強度分布推定を将来に外挿することができる。前節で述べたように発達・衰弱場は持続しないとみられるので、予測段階では発達衰弱項をオミットする方がよい。そうすると、モデル(1)に対応する特性微分方程式は、

$$\begin{aligned} dx/dt &= c_1 x + c_2 y + c_3 \\ dy/dt &= c_4 x + c_5 y + c_6 \\ dz/dt &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

となる。この方程式の上2式の解は、

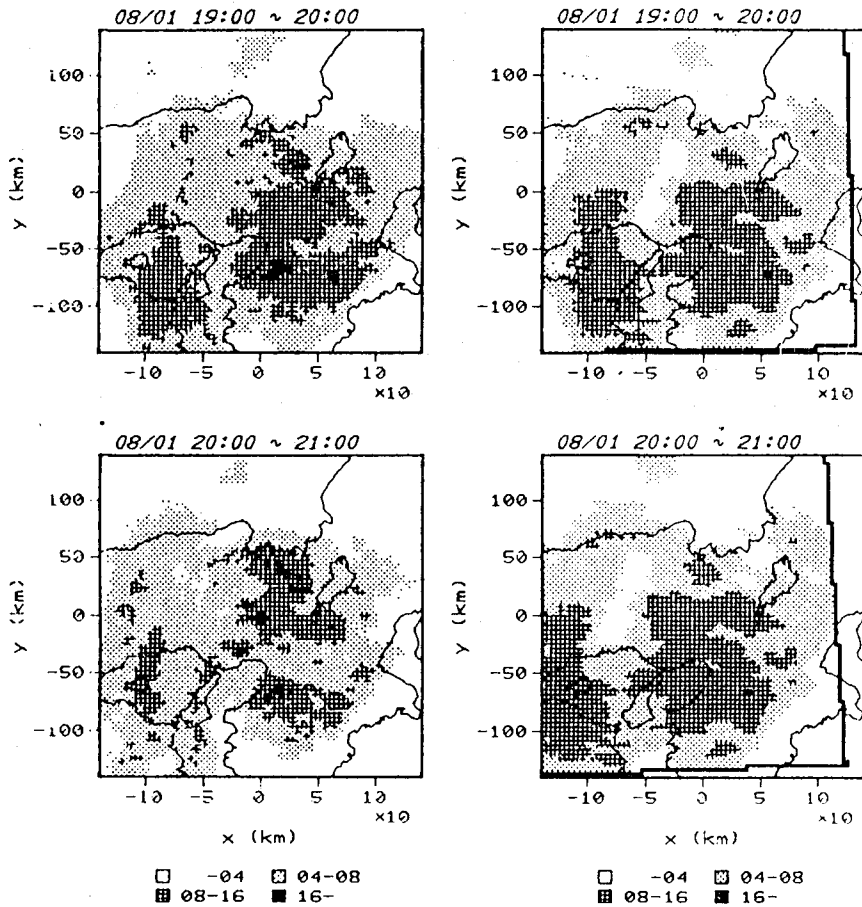
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = R(t-s; c_1, \dots, c_6) \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形に表される。ここで、 $R(t-s; c_1, \dots, c_6)$  は、 $t-s, c_1, \dots, c_6$  にのみ依存して決まる  $2 \times 3$  次行列で、定係数線形微分方程式に関する初等的な理論から解析的に求められる。リードタイム  $\tau$  で予測する場合を考えよう。現在時刻を  $t_0$  と表す。 $s = t_0 + \tau, t = t_0, x(s) = x_i, y(s) = y_j$  とおくと、(9)式は、

$$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix} = R(-\tau; c_1, \dots, c_6) \begin{bmatrix} x_i \\ y_j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

となる。この左辺の点は、将来時刻  $t_0 + \tau$  に点  $(x_i, y_j)$  に到達する特性曲線の現在時刻  $t_0$  での位置を表している。現在時刻の格子点上の降雨強度データから内挿によって、現在時刻の点  $(x(t_0), y(t_0))$  での降雨強度を求めれば、それが将来時刻  $t_0 + \tau$  での点  $(x_i, y_j)$  での降雨強度の予測値を与える。

この方法で降雨を予測した例を Fig. 4 に示す。



(a) Observed Rainfall (mm/h) (b) Predicted Rainfall (mm/h)  
(predicted at 19:00, 08/01)

Fig. 4 Comparison of forecast and observed hourly rainfall distributions.

(b) 二つのフィルタ配列の利用

実時間の予測では、移流ベクトル・発達衰弱場の同定と予測とを交互に繰り返していくことになる。この際、Fig. 5に示すように、2個のフィルタを用意しておくこと記憶容量の点でも計算量の点でも好都合である。フィルタのメモリーを $T$ とすると、フィルタのメモリーをクリアする時点を $T/2$ だけずらせておく。観測データの処理はこの2個のフィルタに対して行うが、予測にはメモリーが $T/2$ を越える方(图中、太実線)を用いる。

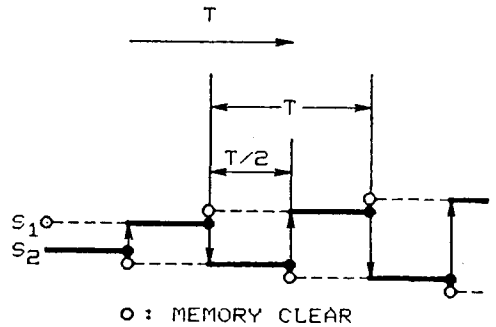


Fig. 5 Use of two filter arrays.



Fig. 6は、由良川流域の流域時間雨量の予測値系列を過去3時間移動平均法 [17] による予測値系列とともに示している。

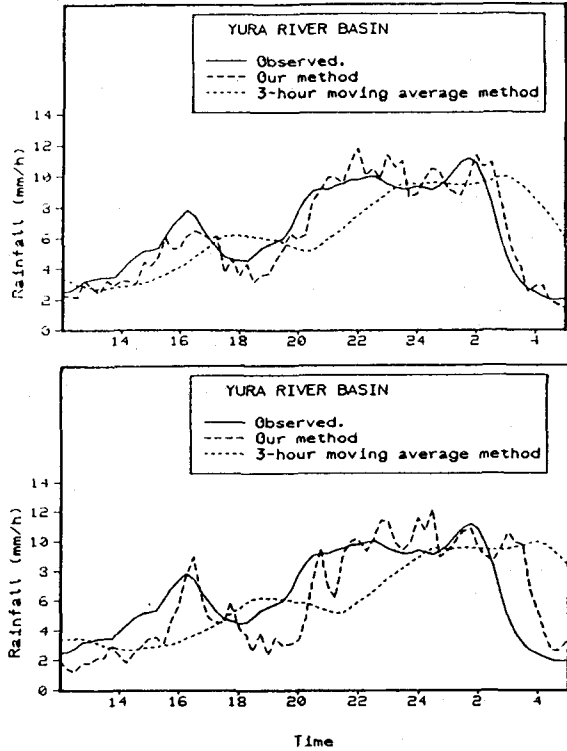


Fig. 6 Observed and forecast areal rainfall intensities for the Yura River Basin (upper: for a 1-hour lead, lower: for a 2-hour lead).

### 3. 流出の実時間予測手法

#### 3.1 流出予測システムの基本的構成

流出予測システムの構成手順は Fig. 7 のように考えられる。まず、基礎とする決定論的状態空間型流出モデルが与えられているとする。このモデルに観測誤差・モデル誤差に対応すると考えるノイズを導入し、確率過程的状態空間型流出モデルに変換する。Fig. 7 の上の矢印がこのステップを表している。次に、確率過程的流出モデルフィルタリング・予測理論を適用して流出予測システムを構成する。Fig. 7 の下の矢印がこの第2のステップを表している。

基礎とする決定論的流出モデルとしてどのようなモデルを選ぶかは、予測精度をも左右する重要な問題であるが、本講では議論しない。計算量や記憶容量の点からは、できるだけ次元の小さな集中型モデルが望ましい。その観点から、

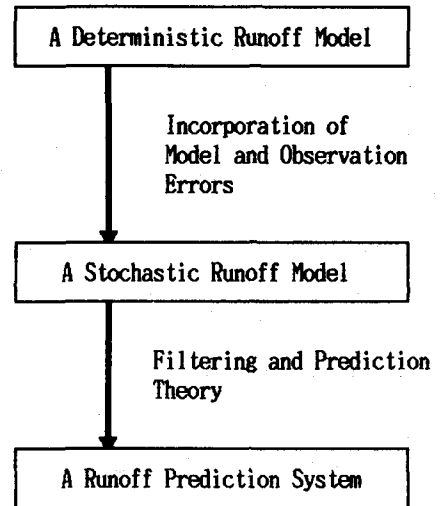


Fig. 7 Building of a runoff prediction system.

雨水流モデルを基礎としたいいくつかの集中化モデルが検討されている [18, 19]。

流出予測システム構成の第1ステップでは、ノイズ項のモデルについて種々議論のあるところであるが[20, 21], 本講では、たとえばJazwinski [22]によって定式化され、Bierman [16]によって動的システムのフィルタリング・予測に応用されている有色ノイズモデルを用いる。

第2のステップでは、フィルタリング・予測のアルゴリズムの数値的安定性、モデル中の非線形関数の取り扱い、降雨予測システムとの結合などが問題となる。Kalmanフィルタアルゴリズムをそのままデジタルコンピュータで実行すると、桁落ちのためしばしば推定値が信頼できないものになる。そこで、本講では、Kalmanフィルタの数値的安定性を改善したBiermanのUDフィルタアルゴリズム[16, 23]を用いる。非線形関数に対しては統計的2次近似手法を適用する。統計的2次近似の実現にあたっては推定誤差分散行列がUDU<sup>T</sup>分解されていると都合であり、その点でもBiermanのUDフィルタを用いるのが便利である。統計的2次近似手法については、Sunahara [24]による統計的線形化フィルタの拡張に関連してMahalanabisとFarooq [25]が議論しているが、変数、関数値ともスカラー値の場合を取り扱っている。ベクトル値の場合についての議論は、高棹と椎葉ら[10, 26, 27]による。

### 3.2 確率過程の状態空間型流出モデル

ある流域に対して

$$\text{状態方程式: } dx/dt = f(x(t), c, r(t)) \tag{11}$$

$$\text{出力方程式: } q(t) = g(x(t), c) \tag{12}$$

の形の流出モデルが与えられていると仮定しよう。ただし、 $r(t)$ は、時刻 $t$ での面積平均降雨強度、 $c = (c_1, \dots, c_{N_c})^T$ は未知のパラメタベクトル、 $x(t) = (x_1, \dots, x_{N_x})^T$ は時刻 $t$ の状態ベクトル、 $q(t)$ は時刻 $t$ の流出強度、 $f = (f_1, \dots, f_{N_x})^T$ は $x(t), c, r(t)$ のベクトル値関数、 $g$ は $x(t), c$ のスカラー値関数である。関数 $f, g$ の形は既知であるとする。ここでは、 $r(t), q(t)$ はスカラー値をとるとしたが、ベクトル値の場合にも議論は全く同様である。どんなモデルも実現象を忠実に表現することはできないので、形式的には(11), (12)の代わりに、

$$\text{状態方程式: } dx/dt = f(x(t), c, r(t)) + \nu_x \tag{13}$$

$$\text{出力方程式: } q(t) = g(x(t), c) + \nu_q \tag{14}$$

を考えなければならない。ここで、 $\nu_x, \nu_q$ は実現象からの偏差を表すために導入されている。

さて、確率過程モデルを用いて、(13), (14)で形式的に導入された $\nu_x, \nu_q$ を明示的に取り扱っていくことを考えよう。正規白色過程モデルが最も簡単なモデルとして考えられるが、筆者らの経験によれば、 $\nu_x, \nu_q$ が正規白色過程であると考えerことは不適切であり、楽観的に過ぎる。そこで、ベクトル値をとる有色ノイズモデルを用いて、 $\nu_x, \nu_q$ をモデル化することを考える。

ベクトル値をとる有色ノイズ $p = (p_1, \dots, p_{N_p})^T$ の推移式は

$$dp_i/dt = -(1/\tau_i)p_i(t) + v_{pi}(t), \quad i = 1, \dots, N_p \tag{15}$$

で与えられる。ただし、 $\tau_i$  は成分過程  $p_i(t)$  の時定数、 $v_{p_i}(t)$  は、平均0で、

$$E\{v_{p_i}(t)v_{p_i}(s)\} = (2/\tau_i)\sigma_{p_i}^2\delta(t-s) \quad (16)$$

$$E\{v_{p_i}(t)v_{p_j}(s)\} = 0, \quad i \neq j$$

を満たす共分散構造をもつものとする。 $E\{\cdot\}$  は  $\{\cdot\}$  で囲む確率変数の期待値を、 $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数である。確率過程  $\{p_i\}$  の定常時分散は  $\sigma_{p_i}^2$  である。

このベクトル値有色ノイズ  $\{p\}$  を用いて、 $\nu_x, \nu_q$  が

$$\nu_x = G_x p, \quad \nu_q = G_q p \quad (17)$$

と表されるとする。ただし、 $G_x$  は  $N_x \times N_p$  次の、 $G_q$  は  $1 \times N_q$  次の非確率行列である。

次に、入出力の観測誤差の取扱いについて考える。議論を簡単にするために、(13)、(14)中の面積平均降雨強度  $r(t)$  を、例えば Thiesen 法などによって得られるその推定値  $u(t)$  で置き換えることにする。そして、この置き換えによる誤差もモデル誤差項  $\nu_x, \nu_q$  に含まれると考える。通常、 $u(t)$  はある特定の時間間隔毎に一定値をとる。簡単のため、この時間間隔が単位時間であるとし、 $k-1 < t < k$  の  $u(t)$  の値を  $u_k$  と表す。流出量もまた単位時間間隔で観測されるものとし、流量  $q(k)$  の観測値を  $y_k$  と表す。観測誤差を  $w_k$  と表すと、 $y_k = q(k) + w_k$  である。観測誤差の系列  $\{w_k\}$  も白色正規系列で分散  $R > 0$  を持つとする。

以上の設定のもとで、次の確率過程的状態空間型流出モデルが得られたことになる。

状態方程式：

$$dx_i/dt = f_i(x(t), c, u_k) + G_{x_i} p(t), \quad k-1 < t < k, \quad i = 1, \dots, N_x \quad (17)$$

$$dp_i/dt = -(1/\tau_i)p_i(t) + v_{p_i}(t), \quad i = 1, \dots, N_x \quad (18)$$

出力方程式：

$$q(t) = g(x(t), c) + G_q p(t) \quad (19)$$

観測方程式：

$$y_k = g(x(k), c) + G_q p(k) + w_k \quad (20)$$

以後、 $p$  をシステムノイズベクトルと呼ぶ。元の状態ベクトル  $x(t)$ 、システムノイズベクトル  $p(t)$ 、未知パラメタ  $c$  とを並べた

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ c \end{bmatrix} \quad (21)$$

が(17)～(20)で記述されるシステムの状態方程式になる。

こうして確率的な誤差項を明示的にモデルに導入したので状態空間法の手法が適用できるようになった。しかし、一方で、 $N_p$ ,  $\tau_i$ ,  $\sigma_{p_i}^2$ ,  $G_x$ ,  $G_q$ を定める問題が発生した ( $R$ は流量観測システムに関する知識から決定されるであろう)。これらの値は、過去のデータから例えば最尤法によって決定するとよいであろう。ここでは、これらの値は既知であるとして議論を進める。

多くの場合、基礎とするシステム方程式は状態ベクトルに関して非線形な項を含んでいるので、非線形関数に対する取り扱いを議論しておく必要がある。

### 3.3 統計的2次近似

(a) 統計的2次近似の定義とその実現

$N$ 次元ベクトル $\xi$ の関数 $g(\xi)$ と、平均値 $\tilde{X}$ 、共分散行列 $\tilde{P}$ をもつ $N$ 次元確率ベクトル $X$ が与えられているとき、 $X \sim N(\tilde{X}, \tilde{P})$ と仮定して、定数 $B^*$ と $N$ 次元行ベクトル $H$ 、 $N$ 次元対称行列 $A$ を、

$$J(B^*, H, A) = E\{|g(X) - B^* - H(X - \tilde{X}) - 1/2 \cdot (X - \tilde{X})^T A (X - \tilde{X})|^2\} \quad (22)$$

が最小になるようにとって、確率変数 $g(X)$ を

$$[g(X)]_2 = B^* + H(X - \tilde{X}) + 1/2 \cdot (X - \tilde{X})^T A (X - \tilde{X}) \quad (23)$$

で近似する。このような近似を統計的2次近似と呼ぶ。ベクトル値関数の統計的2次近似は、成分ごとに統計的2次近似する。

$J(B^*, H, A)$ を最小にする $B^*$ ,  $H$ ,  $A$ を求めるために、共分散行列 $\tilde{P}$ の $UDU^T$ 分解

$$P = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{U}^T \quad (24)$$

が利用できるものと仮定する。ただし、 $\tilde{U}$ は $N \times N$ 次上三角行列、 $\tilde{D}$ は $N \times N$ 次正值対角行列である。そうすると、確率ベクトル $X$ は、 $Z \sim N(0, \tilde{D})$ である $N \times 1$ 確率ベクトル $Z$ を用いて

$$X = \tilde{X} + \tilde{U}Z \quad (25)$$

と表される。この表現を用いると、 $B^*$ ,  $H$ ,  $A$ を求める方程式は、

$$\begin{aligned} B^* &= E\{g(\tilde{X} + \tilde{U}Z)\} - 1/2 \cdot \text{tr}[A \tilde{U} \tilde{D} \tilde{U}^T], \\ \tilde{D} \tilde{U}^T H &= E\{Z g(\tilde{X} + \tilde{U}Z)\}, \\ \tilde{D} \tilde{U}^T A \tilde{U} \tilde{D} &= E\{ZZ^T g(\tilde{X} + \tilde{U}Z)\} - E\{g(\tilde{X} + \tilde{U}Z)\} \tilde{D} \end{aligned} \quad (26)$$

から定められる。ただし、 $\text{tr}[\ ]$ は対角成分の和を表す。 $\tilde{U}$ は上三角行列、 $\tilde{D}$ は対角行列であるから、(26)は容易に解ける。筆者らは、以上の方法により統計的2次近似を実行するFORTRAN77によるサブルーチンSOAPを用意した。(サブルーチンSOAPを含め、以下言及するサブルーチンリストは、文

献[10, 26]に掲載されている。)。 (26)の右辺に現れる期待値の計算には例えば Hermite-Gauss 積分公式を用いるとよい[27, 28]。ただし,  $N_{HG}$  点公式を用いるとき, まともに Hermite-Gauss 積分公式を用いると関数値の評価回数は  $N_{HG}^N$  になるので,  $N$  が大きいと計算時間がかかなり大きくなることも考えられる。しかし, 統計的 2 次近似に関して次の性質が成り立つことを証明できる[26]。

- 1) 2 次式の統計的 2 次近似は元の 2 次式に等しい。
  - 2) 統計的 2 次近似は線形操作である。すなわち,  $[g_1(X) + g_2(X)]_2 = [g_1(X)]_2 + [g_2(X)]_2$  が成り立つ。
  - 3)  $X$  の部分ベクトル  $V$  にのみ依存する関数の統計的 2 次近似は,  $V$  の周辺分布だけを考慮して統計的 2 次近似してよい。
- 1), 2) によって, 2 次式でない非線形項のみを考えればよいことになるが, そのような非線形項は多くの場合 3) で述べたタイプの関数であるから, 計算量は大幅に削減できる。

実際の適用にあたっては, (23)の表現を

$$[g(X)]_2 = B + HX + \delta \tag{27}$$

と書き変えた方が便利である。ただし,

$$B = B^* + \frac{1}{2} \text{tr}[A\tilde{P}] - H\tilde{X} \tag{28}$$

$$\delta = \frac{1}{2} (X - \tilde{X})^T A (X - \tilde{X}) - \frac{1}{2} \text{tr}[A\tilde{P}] \tag{29}$$

とおいた。  $\delta$  は, 平均 0 で, 分散  $R_\delta = \frac{1}{2} \text{tr}[A\tilde{P}A\tilde{P}]$  を持ち  $X$  と (独立ではないが) 無相関である。  $g(X)$  が  $m$  次ベクトルの場合にも, この議論を拡張できて, 成分ごとに

$$[g_1(X)]_2 = B_1 + H_1 X + \delta_1,$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} (X - \tilde{X})^T A_1 (X - \tilde{X}) - \frac{1}{2} \text{tr}[A_1 \tilde{P}]$$

.....

$$[g_m(X)]_2 = B_m + H_m X + \delta_m,$$

$$\delta_m = \frac{1}{2} (X - \tilde{X})^T A_m (X - \tilde{X}) - \frac{1}{2} \text{tr}[A_m \tilde{P}]$$

と統計的 2 次近似し, (27)と同じ形にベクトル形式で表せば,  $\delta$  はやはり  $X$  と無相関であり,

$$E\{\delta\} = 0, \tag{30}$$

$$R_\delta = \{E\{\delta_i \delta_j\}\} = \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}[A_i \tilde{P} A_j \tilde{P}] \right\} \tag{31}$$

である。ただし、 $(i, j)$ 成分が $x_{ij}$ である行列を $\{x_{ij}\}$ と表している。

統計的2次近似の意義を明確にするために、統計的2次近似の誤差を $\epsilon$ と表そう。すなわち、

$$g(X) = B + HX + \delta + \epsilon \quad (32)$$

$\epsilon$ は平均0で $X$ や $\delta$ とは無相関であることを示すことができる。また、右辺の $B + HX$ は統計的線形化((22)で1次項までしか考えない方法)によって得られるものと一致する。統計的線形化では $\delta + \epsilon$ が無視されるのに対し、統計的2次近似では $\delta$ を考慮し、統計的線形化による誤差の分散の下限値が評価されることになる。

#### (b) 統計的2次近似フィルター

$N \times 1$ 次確率ベクトル $X$ の事前推定値 $\bar{X}$ 、事前推定誤差共分散行列 $P$ が与えられているときに、非線形観測関数 $g(X)$ による観測値

$$y = g(X) + w \quad (33)$$

が得られるとしよう。ただし、 $w$ は、 $x$ とは独立で平均0、既知分散 $R > 0$ をもつとする。(33)右辺の非線形観測関数をその統計的2次近似でおきかえると

$$y = [g(X)]_2 + w = B + HX + w_{new} \quad (34)$$

を得る。ここで、 $w_{new} = \delta + w$ は、平均0で、分散 $R_\delta + R$ を持ち、 $X$ とは無相関であることに注意して、 $w_{new}$ をあらためて観測誤差と見なせば、 $X$ の事後推定値 $\hat{X}$ と推定誤差共分散行列 $\hat{P}$ は、

$$\hat{X} = \tilde{X} + K(y - B - H\tilde{X}) \quad (35)$$

$$\hat{P} = \tilde{P} - KH\tilde{P} \quad (36)$$

$$K = \tilde{P}H^T(H\tilde{P}H^T + R_\delta + R)^{-1} \quad (37)$$

で求められる。すでに述べたように、共分散行列の $UDU^T$ 分解が利用できれば、統計的2次近似は容易である。Bierman [16]は、 $\hat{P}$ の $UDU^T$ 分解が直接求められる線形フィルター“UDフィルター”(サブルーチンUDFILT)を提案している。数式で記述すればBiermanのアルゴリズムは複雑に見えるが、数学的な内容はKalmanフィルター(サブルーチンKALFIL)と全く同等であり、計算機での計算に適しており、数値的安定性の点でKalmanのアルゴリズムよりも優れている。そこで、筆者らは、統計的2次近似とBiermanのUDフィルターとを組み合わせた非線形フィルターを用いることを提案し、このフィルターを統計的2次近似フィルター(Statistically Approximated Second-Order Filter, SASOF)と呼んでいる。

### 3.4 実時間流出予測の手順

3.2で構成した確率過程的状态空間型流出モデルに3.3で紹介した統計的2次近似手法を適用した実

時間流出予測の手順を解説する。

木村の貯留関数法のように遅滞時間が導入されている場合は別として、一般に、流出予測には入力である降雨（本講では算定されたまたは算定する予定の面積平均降雨強度、3.2の議論を参照）の予測が必要である。そこで、降雨予測システムの存在を仮定し、各時刻 $k$ で、将来の $M$ 単位時間後までの入力 $\underline{u}_k = [u_{k+1}, \dots, u_{k+M}]^T$ の推定値 $\hat{\underline{u}}_k = [\hat{u}_{k+1}, \dots, \hat{u}_{k+M}]^T$ とその推定誤差共分散行列 $R_{\underline{u}_k} = E\{(\underline{u}_k - \hat{\underline{u}}_k)(\underline{u}_k - \hat{\underline{u}}_k)^T\}$ がこの降雨予測システムによって供給されるものとする。

(a) 流出予測システムの初期化とフィルタリング

流出予測を開始するために、まず、初期時刻 $k$ での状態ベクトル $X(k)$  ((21)を参照)について、  
 $\tilde{X}(k)$ : 流出量 $Q(k)$ の観測値 $y_k$ が得られる前の $X(k)$ の推定値  
 $\tilde{U}(k), \tilde{D}(k)$ :  $\tilde{X}(k)$ による $X(k)$ の推定誤差共分散行列の $UDU^T$ 分解行列  
 が与えられているとする。このとき、

$\hat{X}(k)$ : 流出量 $Q(k)$ の観測値 $y_k$ が得られた後の $X(k)$ の推定値  
 $\hat{U}(k), \hat{D}(k)$ :  $\hat{X}(k)$ による $X(k)$ の推定誤差共分散行列の $UDU^T$ 分解行列

を求めること (=フィルタリング, または観測更新) を考える。観測値 $y_k$ は(20)の形で与えられる。この観測更新の手順は次の通りである。

- 1) 統計的2次近似によって、(20)の右辺第1項 $g(x(k), c)$ を(27)の形に近似する。
- 2) 1)の結果、観測式は全体として、 $X(k)$ の1次式で近似されるので、UDフィルターを用いて、 $\hat{X}(k), \hat{U}(k), \hat{D}(k)$ を求める。

もちろん、ステップ1)の統計的2次近似では3.3で述べた統計的2次近似の性質1)~3)を用いて関数値計算回数を削減するのがよい。これは、以下に述べる予測の場合でも同様である。

(b) 状態ベクトル・流出量の予測

次に、時刻 $k$ での流量観測値 $y_k$ を用いた観測更新の後、すなわち、 $\hat{X}(k), \hat{U}(k), \hat{D}(k)$ が得られた時点で、 $M$ 単位時間後までの流出量 $q(k+j), j=1, \dots, M$ を予測することを考える。

(b.1) 降雨予測情報の考慮 —— 状態ベクトルの拡大

現在時刻 $k$ で、 $M$ 単位時間後までの降雨予測値 $\underline{u}_k$ 、その予測誤差分散行列 $R_{\underline{u}_k}$ が与えられるとする。この情報を流出予測システムに組み込むために、 $R_{\underline{u}_k}$ を $R_{\underline{u}_k} = S_{\underline{u}_k} S_{\underline{u}_k}^T$ と分解する。ただし、 $S_{\underline{u}_k}$ はランク $m$ の $M \times m$ 行列である( $m, S_{\underline{u}_k}$ を求めるにはサブルーチンLOWCHOを用いる)。この $S_{\underline{u}_k}$ を用いると、平均値0、共分散行列 $I_m$ ( $m$ 次単位行列)を持つ確率ベクトル $e_k$ により、 $\underline{u}_k$ は $\underline{u}_k = \underline{u}_k + S_{\underline{u}_k} e_k$ と表されるとしてよい。未知パラメタベクトル $c$ の下にこの確率ベクトル $e_k$ を追加したベクトルを $c'$ と表し、

$$X'(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ e_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \\ c' \end{bmatrix}, \quad t \geq k \tag{38}$$

とおくことにする。また、 $k+j-1 < t < k+j$ ,  $j=1, \dots, M$ で関数 $F_i$ を、 $F_i(x(t), c', t) = f_i(x(t), c, u_{k+j} + S\underline{u}_{kj}e_k)$ と定める。ただし、 $S\underline{u}_{kj}$ は $S\underline{u}_k$ の第 $j$ 行である。このとき、拡大された状態ベクトル $X'(t)$ の $t \geq k$ での推移は、次のように表現される ( $c'$ は、変化しない)。

$$dx_i(t)/dt = F_i(x(t), c', t) + G_{xi}p(t), \quad i=1, \dots, N_x \quad (39)$$

$$dp_i(t)/dt = -(1/\tau_i)p_i(t) + v_{pi}(t), \quad i=1, \dots, N_p \quad (40)$$

拡大された状態ベクトル $X'(k)$ の推定値 $\hat{X}'(k)$ , 推定誤差共分散行列のUD分解 $\hat{U}'(k)$ ,  $\hat{D}'(k)$ は、元の $\hat{X}(k)$ ,  $\hat{U}(k)$ ,  $\hat{D}(k)$ から定められる。

### (b.2) 拡大された状態ベクトルの予測

拡大された状態ベクトル $X'(t)$ の $t > k$ での推移式(39), (40)から、その推定値と推定誤差の分散行列の推移を求める。簡単のため、 $X'(t)$ ,  $c'$ ,  $\tilde{X}'(t)$ ,  $\tilde{U}'(t)$ ,  $\tilde{D}'(t)$ の上付きの $'$ を省略する。時刻 $k$ から時刻 $k+M$ までの間を差分公式が安定になるように分割した分点 $k = t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_{j+1}$ をとる。これらの分点は時刻 $k+i$ ,  $i=1, \dots, M$ を含むようにとる。

ここで、 $j > 0$ に対して、

$\tilde{X}(t_j)$ :  $X(t_j)$ の予測値。

$\tilde{U}(t_j)$ ,  $\tilde{D}(t_j)$ :  $\tilde{X}(t_j)$ による $X(t_j)$ の予測誤差共分散行列の $UDU^T$ 分解

と表すことにする。また、 $\tilde{X}(t_0) = \hat{X}(t_0)$ ,  $\tilde{U}(t_0) = \hat{U}(t_0)$ ,  $\tilde{D}(t_0) = \hat{D}(t_0)$ とおく。実は、統計的2次近似と差分化によって、時刻 $t_{j+1}$ までの間の $X(t)$ の推移が

$$\begin{bmatrix} x(t_{j+1}) \\ p(t_{j+1}) \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xj} & V_{pj} & V_{cj} \\ 0 & M_{pj} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_j) \\ p(t_j) \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{oj} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{gj}v_{xj} \\ v_{pj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

と表わされるのを示すことができる[26, 27]。ただし、 $v_{xj}$ ,  $v_{pj}$ は $X(t_j)$ とは無相関な確率ベクトルである。この推移式はBierman[16]が扱った推移式と類似しており、Biermanと同様のアルゴリズム(サブルーチンUDMAP)で、 $\tilde{X}(t_j)$ ,  $\tilde{U}(t_j)$ ,  $\tilde{D}(t_j)$ から $\tilde{X}(t_{j+1})$ ,  $\tilde{U}(t_{j+1})$ ,  $\tilde{D}(t_{j+1})$ を計算することができる。

### (b.3) 流出量の予測

拡大された状態ベクトル $X'(t)$ の将来時刻での予測値 $\tilde{X}'(t)$ , その予測誤差分散行列の $UDU^T$ 分解 $\tilde{U}'(t)$ ,  $\tilde{D}'(t)$ が求められたから、流出量 $q(t) = g(x(t), c) + G_q p(t)$ を $X'(t)$ の関数とみて統計的2次近似すれば、 $q(t)$ の予測値と予測誤差分散を求めることができる。

### (c) 降雨観測値の入手と状態ベクトルの再予測

時刻 $R$ から単位時間経過して時刻 $k+1$ になると、降雨の観測値 $y_{k+1}$ が入手される。この時点での



観測更新の前準備として、 $u_{k+1}$  の値だけを用いた  $X(k+1)$  の事前推定を求める必要がある。そのためには、(b.2) で用いた方法をくりかえせばよい。ただし、ここでは  $u_{k+1}$  が既知確定値となっているので、状態ベクトルを拡大する必要はない。こうして、 $u_{k+1}$  の値を用いた  $X(k+1)$  の事前推定が得られれば、次に流出量の観測値  $y_{k+1}$  を用いた観測更新をすることになるが、これはすでに(a)で議論したところであるから、 $k+1$  を  $k$  と考えて、(a)の方法を用いることになる。これで、流出予測アルゴリズムのループが完結した。

#### 4. おわりに

本講では、降雨と流出の実時間予測手法について、筆者の研究を紹介した。紙数の都合で、適用例を十分示すことができなかったが、後に示す筆者らの文献を参照されたい。

#### < 参考文献 >

- [1] Austin, G. L. and A. Bellon : Very-short-range forecasting of precipitation by the objective extrapolation of radar and satellite data, Nowcasting (ed. by K. A. Browning), Academic Press, New York, pp. 177-190, 1982.
- [2] 立平：レーダーによる雨量測定と短時間予報，気象レーダー特集，気象研究ノート，第139号，pp. 79-108，1980.
- [3] 立平・牧野：デジタル化されたエコーパターンの予測への応用，研究時報26巻，気象庁，pp. 187-199，1974.
- [4] Wilk, K. E. and K. C. Gray : Processing and analysis techniques used with the NSSL weather radar system, Proc. 14th Radar Met. Conf., pp. 369-374, 1970.
- [5] 石崎・中尾・森本：レーダ雨量計による短時間降雨予測，第35回年次学術講演会講演概要集，土木学会，1980.
- [6] 大倉・石崎・中尾・森本：レーダ雨量計を用いた短時間降雨予測，第27回水理講演会論文集，土木学会，pp. 349-354，1983.
- [7] 吉野・水野・河関：レーダ雨量計による降雨の短時間予測，土木技術資料，Vol. 27, No. 7, 1985.
- [8] 土木研究所水文研究室：レーダ雨量計による短時間降雨予測に関する調査報告書，土木研究所資料第2406号，145pp., 1986.
- [9] 椎葉・高棹・中北：移流モデルによる短時間降雨予測手法の検討，第28回水理講演会論文集，土木学会，pp. 423-428，1984.
- [10] Takasao, T. and M. Shiiba : Development of techniques for on-line forecasting of rainfall and runoff, Natural Disaster Science, Vol. 6, No. 2 pp. 83-112, 1984.

- [11] 下垣・室田・江藤：雨量観測レーダーによる降雨量分布の解析とそのオン・ライン予測，第22回水理講演会論文集，土木学会，pp. 169-174，1978.
- [12] 竹内：雨域・雨量強度分布変化の短時間予測，第22回水理講演会論文集，土木学会，pp. 161-168，1978.
- [13] 森山・平野他：移流拡散モデルによる短時間降雨予測，第29回水理講演会論文集，土木学会，1985.
- [14] 日野：“仮想荷重法”による降雨の短時間予測，第29回水理講演会論文集，土木学会，1985.
- [15] 中北・筒井・池淵・高棹：3次元レーダー雨量計情報の利用に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第30号B-2，1987.
- [16] Bierman, G. J. : Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New York, pp. 13-161, 1977.
- [17] 木下：洪水予報の最近の技術，利根川の洪水予報の例，第19回自然災害科学総合シンポジウム，pp. 51-54，1982.
- [18] 星・山岡：雨水流法と貯留関数法の相互関係，第26回水理講演会論文集，土木学会，1982.
- [19] 高棹・宝・楠橋：貯留関数型洪水流出モデルの比較評価，第29回水理講演会論文集，土木学会，1985.
- [20] 高棹：流出系の同定と予測，土木学会水理委員会，水工学シリーズ82-A-2，1982.
- [21] 宝・高棹・椎葉：洪水流出の確率予測における実際的手法，第28回水理講演会論文集，土木学会，pp. 415-422，1984.
- [22] Jazwinski, A. H. : Stochastic process and Filtering theory, Academic Press, New York, 1970.
- [23] 片山：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，1983.
- [24] Sunahara, Y. : An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems, Joint Automatic Control Conference, University of Colorado, 1969.
- [25] Mahalanabis, A. K. and M. Farooq : A second-order method for state estimation of nonlinear dynamical systems, Int. J. Control, Vol. 14, No.4 pp. 631-639, 1971.
- [26] 高棹・椎葉：洪水流出予測の基礎理論とサブルーチンパッケージ，昭和57・58年度科学研究費補助金（試験研究(2)）成果報告書「洪水の短時間予知手法とその実際化に関する研究」，1983.
- [27] 高棹・椎葉・富澤：統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成，京都大学防災研究所年報，第27号B-2，pp. 255-273，1984.
- [28] Abramowitz, M. and I. A. Stegun : Handbook of mathematical functions, Dover Publications, pp. 890, 1972.
- [29] 戸川：微分方程式の数値計算，オーム社，1981.
- [30] Kitanidis, P. K. and R. L. Brass : Real-time forecasting with a conceptual hydrologic model, Water Resources Research, Vol. 16, No. 6, pp. 1025-1033, 1980.