

分布型流出モデルと動的計画法の統合による 貯水池制御最適化シミュレータの開発

DEVELOPMENT OF RESERVOIR CONTROL OPTIMIZATION SIMULATOR BY
INTEGRATING A DISTRIBUTED-RAINFALL-RUNOFF-MODEL AND DYNAMIC
PROGRAMMING

佐山敬洋¹・立川康人²・菅野浩樹³・寶 馨⁴

Takahiro SAYAMA, Yasuto TACHIKAWA, Hiroki KANNO and Kaoru TAKARA

¹ 正会員 博(工) 土木研究所研究員 水災害リスクマネジメント国際センター

(〒 305-8516 茨城県つくば市南原 1-6)

² 正会員 博(工) 京都大学准教授 大学院工学研究科 都市環境工学専攻 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂)

³ 正会員 工修 新日本製鐵株式会社 (〒東京都千代田区丸の内二丁目 6 番 1 号)

⁴ フェロー会員 工博 京都大学防災研究所教授 社会防災研究部門 (〒 611-0011 宇治市五ヶ庄)

Reservoir control optimization simulator is developed by integrating a distributed-rainfall-runoff-model and Dynamic Programming. The main objective of the system is to find effective reservoir operation rules that can reduce peak discharges even during extreme flood events. As this system uses distributed-rainfall-runoff-models together with optimization algorithms for multiple reservoirs, it can provide optimized reservoir operation patterns under specific rainfall distributions with various objective functions assigned at multiple locations along river channels. The developed system is applied to the Kizu River Basin with five major dam reservoirs. The optimization results suggested that changing the flood control patterns only at Takayama dam reservoir can significantly contribute to reduce peak discharges of 200-year extreme flood events, whereas current operation rules are almost ideal for other four dam reservoirs even for the extreme flood events.

Key Words: *Optimization, reservoir control, Yodo River Basin, dynamic programming, distributed rainfall-runoff model*

1. はじめに

超過洪水に対して治水効果を発揮するようなダム貯水池群の制御方法が近年検討されている。例えば戸谷ら¹⁾は流域の流出特性に応じて効率的に前期放流量を決定する方法を提案している。また複数のダム群を統合的に操作する方法については、ダム群の最適操作や最適配置という観点から、過去に多くの研究事例がある。例えば竹内²⁾は動的計画法と線形計画法の結合によりダム群の最適操作を見出す方法を提案している。また高棟ら³⁾は動的計画法を用いて治水・利水を両立させるダム群の最適配置・規模決定問題を解いている。一方、実時間での最適操作については、洪水到達時間が短いわが国においてその実用化が難しく、気象水文観測が整備された現在においてもその状況は変わっていない。洪水時の緊迫した状況下でリアルタイムに操作方式を最適化し、複雑なダム群操作を行うことは、将来にわたっても困難であるというのが筆者らの見解である。そのうえで、計画規模を超えるような大洪水に対しては、あらかじめ非常時の操作規則を用意しておく、非常時の操作規則に基づいて洪水調節することが、

実行可能かつ有効な方法であると考えられる。

超過洪水を対象とした操作規則を検討するためには、上流河川の整備状況、降雨流出の時空間分布特性、現存するダム群の構造的制約などに十分に配慮する必要がある。さらに、流域全体を守るダム群操作や、特定地点における壊滅的な被害を避けるためのダム群操作など、多様化する治水目的に応じた操作のあり方を検討していくことが大切である。これまでに提案されたダム群操作の最適化法では、流域の降雨流出過程と河道の洪水流下過程を単純な関数に置き換えて計算してきた。そのため、ダム間の任意の地点における流量を目的関数の変数に取ることや、支川からの流入を詳細に考慮することができず、上述のような流域特性に即した検討を行うことが困難であった。そこで、本論では、淀川水系を対象に開発を進めてきた広域分布型流出モデル^{4), 5)}と動的計画法とを組み合わせることによって、さまざまな降雨パターンと目的関数に応じて最適なダム群操作を明らかにするためのシステムを開発する。これを淀川水系の木津川流域に適用し、超過洪水に対して治水効果を発揮するダム群操作のあり方について検討する。

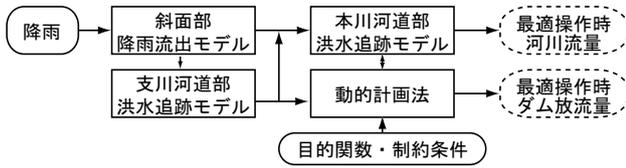


図-1 貯水池制御最適化シミュレータの構成要素と概要

2. 貯水池制御最適化シミュレータ

(1) シミュレータの入出力情報

貯水池制御最適化シミュレータ (Reservoir Control Optimization Simulator, 以下 ResCOS と表記) の入力情報は、分布型流出モデルへの入力降雨と、動的計画法の目的関数および制約条件である。入力降雨は、時空間的に分布した観測降雨やそれをもとにした計画降雨を用いる。目的関数は、単地点または複数地点の河川流量を変数とする関数として定義する。分布型流出モデルを用いて河川流量を算定しているため、評価の対象地点は任意の河道地点に設定することができる。制約条件は、各ダムでの最低水位や最高水位のほか、放流量の上下限を設定できるようにする。さらに、水位に応じて放流量の上下限を変えるなど、より現実に即した制約条件を設定できるようにする。

ResCOS の出力情報は、最適操作を行ったときのダム放流量と河川流量である。また、ダムの貯水量と水位を変数として計算に用いているため、それらの値も出力することができる。

(2) 構成要素

ResCOS は図-1 の四角で囲った4つのサブシステムによって構成している。まず、斜面部の降雨流出モデルが、約3 km 毎に分割した河道区分に流入する側方流入量を計算する。支川河道部の洪水追跡モデルは、それを受けて本川に流入するまでの河川流量を計算する。なお、本論では、ダム操作の影響を受ける河道区間を本川と呼び、ダム操作の影響を受けない河道区間を支川と呼んでいる。本川への側方流入量と支川流量は、ダム操作によって影響を受けないため、動的計画法による最適計算の過程では繰り返し計算をする必要はない。それに対して、本川河道部の洪水追跡モデルは、後述する方法で動的計画法と組み合わせて繰り返し計算をする必要がある。もうひとつの構成要素は動的計画法 (Dynamic Programming: DP) であり、その詳細について以下に示す。

(3) ダム群操作最適化の DP による定式化

a) 変数の定義

DP による最適化の方法を定式化するにあたり、主な変数を以下のように定義する。まず放流量ベクトルは O_t とする。このベクトルは、 N 次元の決定変数ベクトルであり、各ダム ($n = 1, \dots, N$) における時刻 $t-1$ か

ら t までの平均放流量を表す。ここで対象とするダムの数を N 、離散化した全制御期間を T としている。各ダムにおける時刻 t の貯水量ベクトルは S_t とする。これは、 N 次元の状態変数ベクトルである。本川に流入する側方流入量と支川流量とを合わせたベクトルを q_t とする。これらの変数は決定変数に依存しないので、環境変数ベクトルとも呼ばれる。最後に Q_t は時刻 t における本川の流量である。この変数は決定変数と環境変数の両方に依存しているため合成変数ベクトルとも呼ばれる。

b) 問題の定式化

ResCOS の最適化問題は次のように表現できる。

「制約条件 $g(S_t, O_t) \leq 0$ のもとで、初期条件 $S_0 = S^0$ として、目的関数 $J(Q_t)$ を最小化するような決定変数 O_t を求める。」

ただし、ダムの貯水量は連続式 $S_t = S_{t-1} + I_t \Delta t - O_t \Delta t$ を満たさなければならない。また、河川の流量は洪水追跡モデルで表現する流量の推移式 $Q_t = F(Q_{t-1}, O_t, q_t)$ を満たさなければならない。ここに、 I_t とは時刻 $t-1$ から t までの間 Δt のダムへの平均流入量を表しており q_t および Q_t から算定される。

c) 最適性の原理

上述の通り ResCOS は動的計画法 (DP) によりダム群操作を最適化する。DP は R. Bellman⁶⁾ によって開発された数理計画法のひとつである。DP の要点は、全体の最適化問題を小さな部分問題に分割し、それぞれの解を組み合わせて、全体の最適解を得る点にある。これにより、全体を一度に解く通常最適化手法に比べて、計算時間や計算に要するメモリを大幅に節約することができる。DP はダム群操作の最適化など多段決定問題に適しており、最適性の原理に裏付けられた関数漸化式を立てて目的関数を最適化する。DP の基礎となる最適性の原理とは次のようである。

「最適政策とは、初期の状態と最初の決定が何であっても、残った決定は最初の決定から生じた状態に関して最適政策を構成しなければならないという性質を持つ。」

この最適性の原理を式を使って表現すれば次のようである。まず $f_t(S_t)$ を1から t までの決定段階で最適な政策をとった場合の目的関数値と定義する。このときの時刻 t における状態量は S_t であるとする。最適性の原理から、 f_{t-1} と f_t との間には次のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} f_t(S_t) &= \min_{\{O_t\}} \{D(Q_t) + f_{t-1}(S_{t-1})\} \\ &= \min_{\{O_t\}} \{D(Q_t) + f_{t-1}(S_t - I_t \Delta t + O_t \Delta t)\} \quad (1) \end{aligned}$$

ここで $D(Q_t)$ は時刻 t の評価関数を表している。この評価関数を用いて目的関数 J を通常次のように設定する。

$$J = \sum_{t=1}^T \{D(Q_t)\} \quad (2)$$

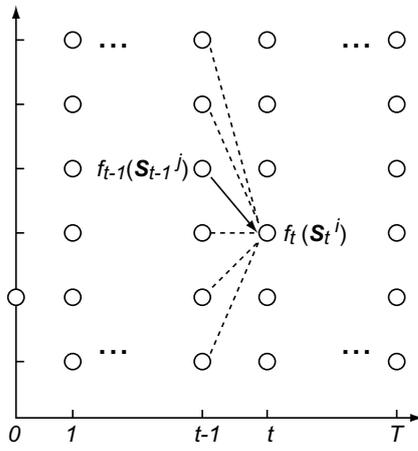


図-2 動的計画法による最適化アルゴリズム

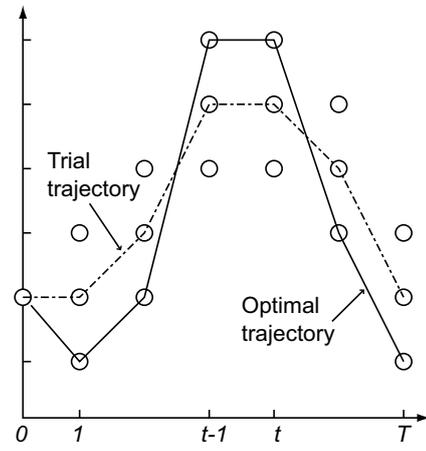


図-3 DDDPによる最適化アルゴリズム

なお、(1)式の漸化式を解くためには、初期段階の決定変数ベクトル \mathbf{O}_1 による目的関数値 $f_1(\mathbf{S}_1)$ が必要である。本論では $f_1(\mathbf{S}_1)$ を次のように与える。

$$f_1(\mathbf{S}_1) = D(\mathbf{Q}_1) \quad (3)$$

d) DPの解法

DPでは、まず(1)式と(3)式によって f_t を T の段まで順次求める。この過程をここでは Forward Process と呼ぶ。

図-2は、Forward Processで時刻 $t-1$ から t にまで進む間の計算過程を模式的に示している。図中の○印は各時刻における貯水量に対応している。例えば各ダムで最大貯水量と最小貯水量を50分割して離散化したとすれば、各時刻の○の数は $M = 50^N$ (N :ダムの数)になる。

$f_t(\mathbf{S}_t^i)$ を決定するためには、前時間ステップの全ての状態量 \mathbf{S}_{t-1}^j から \mathbf{S}_t^i に移行する際の評価関数値 $D(\mathbf{Q}_t)$ を求める必要がある。そして $\{D(\mathbf{Q}_t) + f_{t-1}(\mathbf{S}_t - \mathbf{I}_t \Delta t + \mathbf{O}_t \Delta t)\}$ が最小となるような \mathbf{S}_{t-1} を探す。各 \mathbf{S}_t^i について、その状態に至るまでの目的関数値の最小値 $f_t(\mathbf{S}_t^i)$ とその状態に至った直前の状態量 \mathbf{S}_{t-1}^j を記憶しておく。全ての状態量 ($i = 1, \dots, M$) に対して計算が終われば次の時間ステップに進む。これを繰り返し、時刻 T まで進めば Forward Process が終わる。

つぎに、 $f_T(\mathbf{S}_T)$ が求めれば、それを与える最終段階の貯留量ベクトルを \mathbf{S}_T^{opt} として、それに至る前時間ステップの状態量ベクトルを $\mathbf{S}_{T-1}^{opt} = \mathbf{S}_{T-1}$ とする。時間をさかのぼりながら、この操作を繰り返すことにより、最適化したときの貯留量ベクトルの系列 $\mathbf{S}_t^{opt} (t = 1, \dots, T)$ を求める。この過程をここでは Backward Process と呼ぶ。Forward Process と Backward Process が終われば最適化が終了する。

e) DDDPによる計算負荷の軽減法

DPの問題点は N の数が増えると、計算負荷が飛躍的に増大することにある。また計算に要する記憶容量も離散化数の N 乗に比例して増加するので、例えば5

個のダム群をそれぞれ100分割して最適化する場合には、少なくとも 10^{10} のオーダーの記憶容量が必要となる。この数は、現代の計算機能力をもってしても容易に取り扱える量ではなく、何らかの近似解法が必要となる。高棟ら³⁾はダム群操作の最適化問題に対して、さまざまな近似解法を比較検討し、そのひとつとして Discrete Differential Dynamic Programming (DDDP)⁷⁾を適用することの有用性を示している。本論で開発する ResCOS にも、この DDDP の近似解法を採用することにした。

図-3は、DDDPの要点を模式的に示したものである。図中の○印は、図-2と同様に各時刻の状態変数ベクトルを表している。DPと異なるのは、試系列 (Trial trajectory)、局所最適系列 (Optimal trajectory)、近傍 (Corridor) という概念を導入している点にある。

具体的な DDDP のアルゴリズムは次の通りである。まず、制約条件を満たす初期の系列を試系列とし、その近傍で DP を実行して局所最適系列を求める。求めた局所最適系列を試系列とし、つぎの局所最適系列を求める。この計算を繰り返すことによって、最終的に全体的な最適系列を求める。なお、ここでいう近傍とは、各ダムで試系列の状態量を一単位ずつ増減したものである。図-3は簡単のために各時刻の○の数を試系列の上下に一つずつ描いているが、実際に DDDP で探索する状態変数ベクトルの数 (M') はダム数が N の場合には $M' = 3^N$ となることに注意する。なお、DDDP は繰り返し計算を行うので収束判定が必要となるが、本論の適用例では試系列と局所最適系列が一致するまで計算を繰り返した。

(4) ResCOSによるダム群操作の最適化アルゴリズム

DDDP と分布型流出モデルとを統合した ResCOS によるダム群操作最適化のアルゴリズムは次の通りである。
1) 斜面部降雨流出モデルと支川河道部の洪水追跡モデルとを実行し、入力降雨に対する本川への側方流入量と支川流入量 $q_i (i = 1, \dots, T)$ を計算する。
2) 本川河道部の流量ベクトルを \mathbf{Q}_0 で初期化する。

3) 状態変数ベクトルの試系列を初期化する。本論では、全期間にわたって各ダムの最低水位を貯水量とする状態変数ベクトルを初期の試系列とする。

ここまでの初期化の手順である。次に示す4)から6)の手順が Forward Process であり、時刻 $t-1$ から t に進むために必要な計算過程となる。

4) 各状態変数ベクトル S_t^i について、 S_{t-1}^j から S_t^i に移行する際の放流量ベクトル O_t を求める。ダムが直列に配置されている場合には、本川の洪水追跡モデルを実行して、下流ダムへの流入量をまず計算してから O_t を算定する。

5) S_t^i から S_{t-1}^j に移行する際の流量 Q_t を計算し、評価関数値 $D(Q_t)$ を計算する。なお、洪水追跡モデルを実行する際には $t-1$ の河川流量が初期条件として必要となるが、その値には前時間ステップの6)で求まる $Q_{t-1}^{temp}(S_{t-1}^j)$ を初期条件として用いる。

6) 全ての $j(j=1, \dots, M')$ について4) 5) を実行することにより $f_t(S_t^i)$ を求め、 $f_t(S_t^i)$ と対応する S_{t-1}^j を $S_t^{from}(S_t^i)$ としてメモリに保存する。また、このときの河川流量を $Q_t^{temp}(S_t^i)$ としてメモリに保存しておく。

ここまでの計算過程を $t=1$ から T まで繰り返すことによって Forward Process が終了し、次に Backward Process に移る。

7) $f_T(S_T^i)$ に到達したときの S_T^i を時刻 T の局所最適系列 S_T^{opt} とする。

8) Backward Process では、時刻を T からさかのぼりながら、 $S_{t-1}^{opt} = S_t^{from}(S_t^{opt})$ で得られる局所最適系列を求める。

9) $S_t^{opt}(t=1, \dots, T)$ が試系列と異なっていれば、まだ最適系列に至っていないので $S_t^{opt}(t=1, \dots, T)$ を試系列として4)に戻って再びDPを実行する。全期間に渡って試系列と局所最適系列が一致すれば10)に進む。

10) 最適化によって得た状態変数ベクトル $S_t^{opt}(t=1, \dots, T)$ をもとに、対応する放流量 O_t^{opt} と河川流量 Q_t^{opt} を洪水追跡モデルで計算する。

3. 実流域への適用

(1) 計算条件

a) 対象流域とそのダム群

開発した ResCOS を淀川流域上流の木津川流域(加茂地点上流: 1469 km²)に適用する。淀川流域(枚方地点上流)には全部で7基の主要な多目的ダムが存在しており、そのうちの5基は木津川流域に位置している(図-4)。

現行の操作規則では、各ダムが独立して洪水調節を行うようになっており、基本的には各ダムの水位と流入量に応じて放流量が決定される。ただし、青蓮寺ダムと室生ダムについては、予測雨量をもとにして洪水前に水位を低下させる予備放流を行っている。

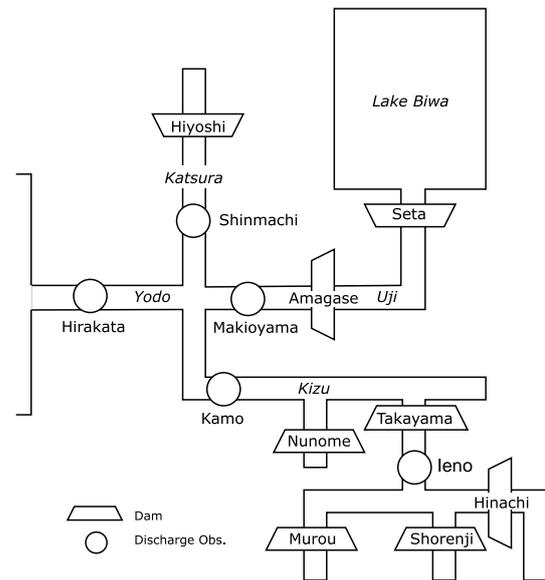


図-4 淀川水系のダム群(本論では木津川流域加茂地点上流の5ダムを対象にした。)

木津川流域の計画対象地点は、加茂地点と家野地点(高山ダムの上流に位置する地点)であり、計画高水流量はそれぞれ 6,100 m³/s と、3,800 m³/s である。加茂地点の流下能力は1998年の時点で約 3,400 m³/s である。

b) 目的関数

本論の適用例では式(2)に示した目的関数を用いる。式(2)中の評価関数 $D(Q_t)$ については、木津川流域の計画基準点である加茂地点の流量 Q_t^{kamo} [m³/s] と家野地点の流量 Q_t^{ieno} [m³/s] をそれぞれの計画高水流量で除して二乗和をとった次の関数形を用いた。

$$D = \left(\frac{Q_t^{kamo}}{6100} \right)^2 + \left(\frac{Q_t^{ieno}}{3800} \right)^2 \quad (4)$$

この関数は、破堤等の被害が流量に比例して増大すると仮定して得られるものである³⁾。評価対象地点や評価関数を治水の目的に応じて設定することにより、その目的にふさわしいダム群の操作が明らかになる。

c) 制約条件

DPを実行する際の水位の制約条件としては、それが制限水位を下回らないこと、また、サーチャージ水位を上回らないこととした。ただし、予備放流を許容するダムについては、操作規則に明記された予備放流水位まで水位を下げることを許した。放流量の制約条件としては、平常時に極端に放流量を大きくしたり、出水時に極端に放流量を小さくしたりするような、非現実的な操作を行わないように、流入量が洪水調節開始流量より小さい場合には放流量もそれより小さく、逆に流入量が洪水調節開始流量より大きい場合には放流量をそれより大きくするように制限をかけた。

d) 離散化数

DPは状態変数を離散化して最適化を行う。ここでは試行錯誤的に離散化数を変えて実験を行い、各ダムの最

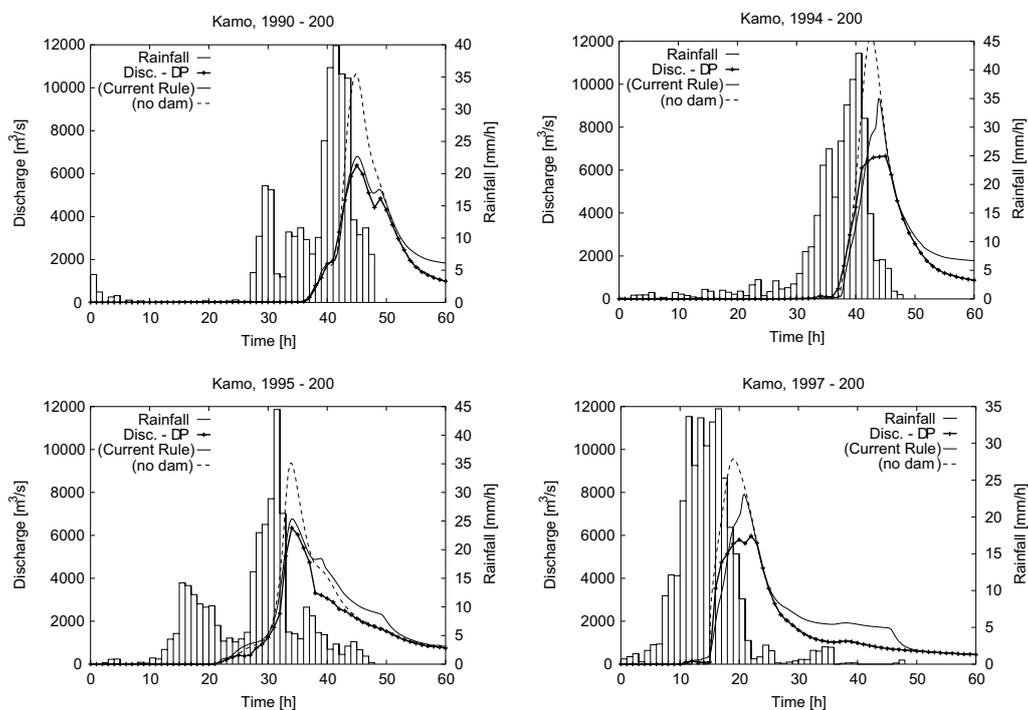


図-5 最適操作 (DP), 現行操作 (Current Rule), ダムなし (no dam) の場合の加茂地点の流量: 90 年, 94 年, 95 年, 97 年の降雨を 200 年確率に引き伸ばして ResCOS およびダム操作を考慮する広域分布型流出予測システムに入力した。

大貯水量と最小貯水量との間を 50 等分することにした。この離散化数で木津川流域の 5 基のダムを対象に最適化を行ったところ、パーソナルコンピュータ (Xenon, 3.0 GHz) を用いて、約 30 分程度で計算が収束した。このときの繰り返し数は概ね 60 回から 70 回ぐらいであった。

e) 初期条件

計算開始時のダム水位は制限水位に設定した。また、初期の試系列は計算期間中の水位が制限水位で一定になるように設定した。つまり、流入量と放流量が一致する操作をした状態を初期の試系列として想定した。

f) 対象降雨イベント

対象とする降雨イベントは、1982 年以降で木津川流域に出水をもたらした、4 出水時の観測降雨 (約 30 地点の時間雨量を最近隣法で内挿して得た時空間分布) を、加茂地点上流域の 2 日雨量が、50 年, 100 年, 150 年, 200 年のリターンピリオドに相当するように引き伸ばしたものとした。

(2) 計算結果

現行の操作規則に基づいてダム群を操作した場合と、ResCOS によってダム群を最適操作した場合の加茂地点における流量を比較する。現行操作の結果は、ダムモデルを組み込んだ広域分布型流出予測システムによるシミュレーションの結果であり、ダムのただし書き操作や予備放流操作など洪水時の操作過程を詳細に再現している。また、比較のためにダムが存在しない状況を想定したシミュレーションも実行した。

図-5 は 1990 年, 94 年, 95 年, 97 年の出水イベントを 200 年確率に引き伸ばして入力した際の結果である。まず、ダム無しの条件で計算した結果 (no dam) に着目すると、94 年のイベントでピークが約 12,000 m³/s に達しており、その他のイベントでも約 10,000 m³/s と、加茂地点の計画高水流量 6,100 m³/s をはるかに上回っていることがわかる。

現行操作のシミュレーション結果 (sim) は、90 年, 95 年のイベントでは概ね計画高水流量程度までピークを低減できているが、94 年, 97 年のイベントではピーク流量がそれぞれ 9,300 m³/s, 7,900 m³/s と、ダム群のピーク低減効果が小さい。それは図-6 の (Current rule) が示すように、94 年と 97 年のイベントにおいて、洪水のピークが生じる前に高山ダムがただし書き操作を行ったことが主な原因である。なお、高山ダムでは流入量が 1300 m³/s を超えると一定率一定量方式で洪水調節を開始するので、94 年, 97 年のイベントでも洪水前の流量は低減できていて、その結果、加茂地点の流量ピークの生起時刻を遅らせる効果を上流のダム群が発揮していることが分かる。

次に ResCOS による最適化計算の結果 (DP) に着目する。図-5 に示すように、加茂地点のピーク流量は 94 年, 97 年のイベントに対しても計画高水流量程度まで低減できている。また、90 年, 95 年イベントについては、現行操作の結果とほとんど同じ流量であることが分かる。図-6 に示した最適化した高山ダムの放流量 (DP-Outflow) をみると、94 年, 97 年イベントでは洪水の前半部で放流量を 3,000 m³/s 程度まで一度上げてお

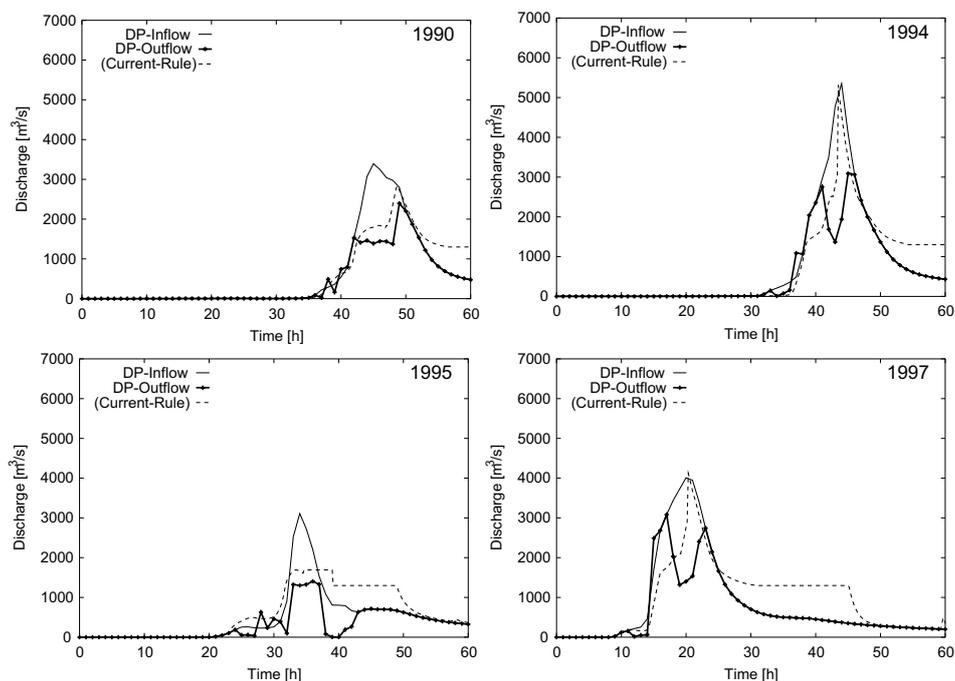


図-6 最適操作 (DP), 現行操作 (Current Rule) による高山ダムの放流量と, 最適操作 (DP) 時の高山ダムへの流入量。

いて、ピーク時に放流量を $1,300 \text{ m}^3/\text{s}$ 程度まで低減させ、その後また放流量を増やすという二山型の特徴的な放流パターンになっていることが分かる。一方、90年のイベントでは現行操作に類似した放流となっていて、洪水の前半部で放流量を一定に保ち、後半部でただし書き操作に入るようなパターンになっている。95年のイベントも現行操作とほぼ同じ放流パターンである。

以上の結果をまとめると、現行の操作方式では計画高水流量をはるかに上回るような超過洪水に対して、高山ダムの放流を二山型の方式に変えることによって、加茂地点の流量を計画高水流量程度まで低減することができる。その他のダム群については、ここでは紙面の都合上結果を示すことができないが、現行の規則に基づく操作と最適化した操作とがほぼ同じであり、現行の操作が超過洪水に対しても概ね理想的な操作であることが明らかになった。

4. おわりに

超過洪水に対して有効なダム群の操作を解明することを目的とし、広域分布型流出予測システムと動的計画法とを組み合わせた貯水池制御最適化シミュレータを開発した。このシステムは、分布型流出モデルを用いてできる限り詳細に洪水現象を再現し、河川流量の目的関数を最適化するダム群操作のシミュレータである。このシステムを淀川水系の木津川流域に適用した結果、下流の高山ダムにおいては最適化された放流量系列が現行操作とは異なる二山型の放流パターンとなる一方で、上流のダム群では現行操作がほぼ最適であ

ることが明らかになった。なお、実際のダム群操作においては、全てのダムを最適に操作することは不可能であり、こうしたシミュレータを用いて明らかになる最適操作系列に基づいてあらかじめ超過洪水時の操作規則を用意しておき、超過洪水であると判断された洪水に対しては、そうした非常時の操作規則に基づく放流方式に切り替えるというのが現実的な対策である。

参考文献

- 1) 戸谷英雄, 秋葉雅章, 宮本守, 山田正, 吉川秀夫: ダム流域における洪水流出特性から可能となる新しい放流方法の提案, 土木学会論文集 B, Vol. 62, No. 1, pp. 27 - 40, 2006.
- 2) 竹内邦良: 貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適操作手法, 土木学会論文報告集, No. 222, pp. 93 - 103, 1974.
- 3) 高棟琢馬, 池淵周一, 小尻利治: 水量制御からみたダム群のシステム設計に関する DP 論的研究, 土木学会論文報告集, 第 241 号, pp. 39 - 50, 1975.
- 4) 佐山敬洋, 立川康人, 寶馨, 市川温: 広域分布型流出予測システムの開発とダム群治水効果の評価, 土木学会論文集, No. 803 / II - 73, pp. 13 - 27, 2005.
- 5) 佐山敬洋, 菅野浩樹, 立川康人, 寶馨: ダム操作過程を導入した広域分布型流出予測システムによる淀川流域の治水安全度評価, 水工学論文集, 第 50 巻, pp. 601 - 606, 2006.
- 6) Bellman, R.: *Dynamic Programming*, 340 pp., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- 7) Heidari, M., Chow V.T., Kokotovic, P.V. and Meredith D.D.: Discrete Differential Dynamic Programming Approach to Water Resources Systems Optimization, *Water Res. Res.*, Vol. 7, No. 2, pp. 273 - 282, 1971.