非線形集中型モデルと降雨の逆推定による流出予測手法の開発

DEVELOPMENT OF A RUNOFF FORECASTING METHOD WHICH USES NONLINEAR LUMPED RUNOFF MODELS AND INVERSE ESTIMATION OF RAINFALL INPUTS

椎葉充晴[1]・永田卓也[2]・立川康人[3]・萬和明[4]・市川温[5]
M. SHIIBA, T. NAGATA, Y. TACHIKAWA, K. YOROZU and Y. ICHIKAWA

[1] 正会員　工博　京都大学教授　大学院工学研究科都市環境工学専攻（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂）
[2] 学生員　工学士　京都大学大学院都市環境工学専攻
[3] 正会員　工博　京都大学准教授 大学院都市環境工学専攻
[4] 正会員　工博　京都大学助教 大学院都市環境工学専攻
[5] 正会員　工博　山梨大学准教授 山梨大学大学院医学工学総合研究部 (〒 400-8511 甲府市武田 4-3-11)

A runoff forecasting method which uses nonlinear lumped runoff models and inverse estimation of rainfall inputs is presented. The type of the runoff models used in this method does not need to be s state space model. The models are assumed to be a nonlinear lumped model which converts rainfall inputs to runoff discharges. Considering that the observation of runoff dicharge means the observation of rainfall inputs by the runoff system, the method of estimating rainfall inputs is developed. This study differs from Hino et al.'s study which uses a linear rainfall-runoff model and inverse estimation method in the point that this study gets dynamic linear rainfall-runoff expressions using the statistical linearization technique.

Key Words: *Runoff Forecasting, Statistical Linearization, Inverse Estimation*

1. 始めに

正確な流出モデルが与えられ、実際に降った雨が誤差なく観測できれば、流出予測問題は降雨予測問題に帰着する。しかし、実際には、降雨を誤差なく観測することはできないし、流出モデルにも誤差があるし、将来の降雨の予測にも誤差が含まれている。これらの誤差が複合して、流出予測の誤差が生じてくる。

本研究では、流出モデルを状態空間型に限定しないで、降雨から流出量へ変換する一般的な型の集中型モデルが与えられていると想定し、流出量の観測が過去の降雨量系列を観測していることになっていると考えて、降雨量系列を推定する方法によって、流出予測の誤差を減少させる方法を提案する。

線形の流出モデルを対象にして、降雨を逆推定する手法を考えている日野ら [1)] の方法とは異なり、ここで提案する方法では、非線形の集中型モデルを時々刻々線形化して、降雨入力を逆推定している。

2. 問題の定式化

(1) 流出モデルの仕様

本研究で提案する手法を適用する集中型流出モデル M は与えられているものとする。その仕様は以下のようであるとする。

1. 計算開始時刻 t_0 での初期条件は、有限個数のスカラー

$$S_1, S_2, \ldots, S_{N_S} \tag{1}$$

で指定される。ただし、N_S は、初期条件を指定するスカラーの個数である。以後、次のように、S_i を第 i 成分とする列ベクトルを S と表す。

$$S = (S_1, S_2, \ldots, S_{N_S})^T \tag{2}$$

ただし、ベクトルや行列の右上につけた T はそのベクトルや行列の転置をとることを意味する。

2. モデル M への入力である降雨量は、一定の時間間隔 Δt ごとの値として与えられる。時刻 $t_0 + (i-1)\Delta t$ から $t_0 + i\Delta t$ までの間の降雨量を R_i と表す。

3. 流出計算の結果も降雨量系列と同じ時間間隔 Δt で得られる。

現在時刻 t は、初期時刻 t_0 から、Δt の整数倍の時間経過した時刻だとし、K_t を

$$K_t = (t - t_0)/\Delta t \tag{3}$$

と定義する。

流出モデル M は、時刻 t の流出量 $q(t)$ を、時刻 t_0 での初期条件 $S_1, S_2, \ldots, S_{N_S}$ と、時刻 t_0 以降、時刻 t までの降雨量系列 $R_1, R_2, \ldots, R_{K_t}$ から算出する。この関

係を、

$$q(t) = M(S_1, S_2, \ldots, S_{N_S}, R_1, R_2, \ldots, R_{K_t}) \tag{4}$$

と表す。

4. 実際には、流出モデルが未知パラメタを含んでいることも考えられるが、ここでは流出モデルのパラメタは全て既知であると仮定し、パラメタを推定する必要はないとする。

(2) 入力ベクトルの仕様

以後の記述を簡単にするために、時刻 $t - i\Delta t$ から時刻 $t - (i-1)\Delta t$ の間の降雨量を $R(i, t)$ と表すことにする。前に、時刻 $t_0 + (i-1)\Delta t$ から $t_0 + i\Delta t$ までの間の降雨量を R_i と表すことにしたから、

$$R(i, t) = R_{K_t - i + 1}, \quad R_i = R(K_t - i + 1, t) \tag{5}$$

である。この関係を使うと (4) 式は

$$q(t) = M\Big(S_1, S_2, \ldots, S_{N_S}, R(K_t, t), R(K_t - 1, t) \ldots, R(1, t)\Big) \tag{6}$$

と表される。ここで、降雨量系列 $R(1, t)$, $R(2, t)$, ..., $R(K_t, t)$ と初期条件 $S_1, S_2, \ldots, S_{N_S}$ をまとめた列ベクトルを $I(t)$ と表すことにする。すなわち、

$$I(t) = \begin{bmatrix} R(1, t) \\ R(2, t) \\ \ldots \\ R(K_t, t) \\ S_1 \\ S_2 \\ \ldots \\ S_{N_s} \end{bmatrix} \tag{7}$$

と表す。(6) 式の右辺は、$I(t)$ の関数 $F(I(t))$ と見なせるから、(6) 式は

$$q(t) = F\Big(I(t)\Big) \tag{8}$$

の形と見なせる。

以後の記述を簡単にするために、$I(t)$ を入力ベクトルと呼ぶ。時刻が経過して、t が増加すると、入力ベクトル $I(t)$ の次元が大きくなっていくことに注意する。また、入力ベクトルの第 1 成分は、最も最近の降雨量であり、第 2 成分、第 3 成分と進むごとに過去の降雨量を表すようになっている。$I(t)$ の最後の N_s 個の成分は、初期条件を表している。

(3) 初期条件の推定、降雨量と流出量の観測

初期条件 $S = (S_1, S_2, \ldots, S_{N_S})^T$ の値は未知ではあるが、その推定値 $\bar{S} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots, \bar{S}_{N_s})^T$ と推定誤差の共分散行列

$$P_S = E\left\{(S - \bar{S})(S - \bar{S})^T\right\} \tag{9}$$

は与えられているとする。また、降雨量 $R(1, t)$ の観測値が、時刻 t に得られるとし、その観測値から得られる降雨量の推定値を $\bar{R}(1, t)$、降雨量の推定誤差分散を $\sigma_{R(1,t)^2}$ と表すことにする。さらに、

$$y(t) = q(t) + w_t \tag{10}$$

で表されるような流出量の観測値 $y(t)$ が時刻 t に得られるとする。ただし、w_t は、流出量の観測値の誤差であり、その平均値は 0、分散は $\sigma_{w_t^2}$ で与えられるとする。

(4) 未知入力ベクトル概念の導入

観測式 (10) は直接的には、$q(t)$ を観測しているものだが、$q(t)$ の流出モデルによる表現である (8) 式を代入すれば、

$$y(t) = F\Big(I(t)\Big) + w_t \tag{11}$$

となるから、流出量を観測しているということは、間接的に、入力ベクトル $I(t)$ を観測したものともみなすことができる。結局、降雨量の観測値、流出量の観測値 $q(t)$ は、いずれも入力ベクトル $I(t)$ を観測していて、$I(t)$ に関する情報を与えているものと考えることができる。

本研究では、降雨量の観測値、流出量の観測値 $y(t)$ を入手して、これらの観測値を利用して $I(t)$ の値を逆推定していき、将来降雨の予測と併せて、将来の流出量を推定していく。現在時刻を t 、将来時刻を $t + n\Delta t$ とすると、将来時刻 $t + n\Delta t$ の流量 $q(t + n\Delta t)$ は、

$$q(t + n\Delta t) = F\Big(I(t + n\Delta t)\Big) \tag{12}$$

と表され、入力ベクトル $I(t + n\Delta t)$ の最初の n 個の成分は、将来の降雨量系列、その後の部分は、入力ベクトル $I(t)$ であるから、たとえば、入力ベクトル $I(t + n\Delta t)$ の最初の n 個の成分に予測降雨量の値を代入し、その後の部分の入力ベクトル $I(t)$ の部分には、それまでの降雨量、流出量の観測値を利用して得た推定値を代入して、$q(t + n\Delta t)$ の予測値を得ることができる。

以上から、降雨量や流出量の観測値を時々刻々得て、それらの値から入力ベクトル $I(t)$ を推定して、将来の流出量を予測するという方法が考えられるが、その場合、時間が経過するにつれて、入力ベクトル $I(t)$ の次元が大きくなっていくという問題に対応しておく必要がある。推定すべきベクトル量があるとき、そのベクトル量の次元が大きくなると、計算時間が増大するなど様々な困難が発生するからである。

一般に、流出量は初期条件及び過去の降雨量系列によってその値が決定されるが、初期条件や過去の降雨量が現在の流出量に及ぼす影響は、現在時刻に近い時刻の降雨量が現在の流出量に及ぼす影響に比べて時間の経過とともに小さくなっていく。流出系は因果性のシステムであって、ある時刻の条件の影響は時間の経過とともに薄れて行く。また、流出量の観測を通して、初期条件や過去の降雨量ほど何度も推定することになると解釈されるので、初期条件や過去の降雨量ほど精度良く推定できると考えられる。したがって、入力ベ

クトル $I(t)$ の次元は大きくなっていくが、真値が分からないとして推定の対象とするべきなのは、入力ベクトル $I(t)$ の最初の方の成分、すなわち現在時刻に近い時刻の降雨量で、現在の流出量にあまり影響を及ぼさなくなった成分は、その推定値を確定値としてしまって、推定の対象から除外することにする。

現在時刻を t として、入力ベクトル $I(t)$ のうち、最初の $J(t)$ 個の成分を現在および将来の流出量に影響を与える可能性がある変量として推定の対象にすることにし、残りの $K_t - J(t) + N_S$ 個の成分は、それまでに得た推定値を確定値として与えることにする。初期時刻では、初期条件が全て未知だとして

$$J(t_0) = N_S \tag{13}$$

とする。

その後の $J(t)$ をどのようなルールで決定するかは 3 の (4) で考察する。$I(t)$ の次元は大きくなっても、実際に推定する必要がある個数 $J(t)$ は、入力ベクトルを推定するための計算処理がそれほど多くならずに処理できる範囲になるように決めるものとして、理論を構成していく。

こうして、現在および将来の流出量に影響を与える可能性がある変量として推定の対象にすることにした入力ベクトル $I(t)$ の最初の $J(t)$ 個の成分からなるベクトルを以後、未知入力ベクトルと呼び、$X(t)$ と表すことにする。入力ベクトル $I(t)$ の最初の $J(t)$ 個の成分を除いた残りの $K_t - J(t) + N_S$ 個の成分からなるベクトルを既知入力ベクトルと呼び $C(t)$ と表す。$I(t), X(t), C(t)$ の関係は次式のようである。

$$I(t) = \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ \vdots \\ I_{J(t)}(t) \\ \hline I_{J(t)+1}(t) \\ \vdots \\ I_{K_t+N_s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) \\ I_{J(t)+1}(t) \\ \vdots \\ I_{K_t+N_s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) \\ C(t) \end{bmatrix} \tag{14}$$

既知入力ベクトル $C(t)$ は、本来は不確定として取り扱うべき変量であるが、実質的に確定値として取り扱ってよいと考えるので、$C(t)$ は、その推定値 $\bar{C}(t)$ で置き換えて、

$$I(t) \doteqdot \begin{bmatrix} X(t) \\ \bar{C}(t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

と近似する。流出量 $q(t)$ を計算するときも、

$$q(t + n\Delta t) \doteqdot F\left(\begin{bmatrix} X(t) \\ \bar{C}(t) \end{bmatrix} \right) \tag{16}$$

として計算するので、$q(t)$ の不確かさは、$X(t)$ の不確かさによるものと考える。

3. 流出量の予測アルゴリズム

本研究では、Kalman フィルターを用いるが、実際には、Bierman[2] が提案している UD フィルターを用いる。UD フィルターでは、共分散行列 P を、対角成分が 1 の上三角行列 U と対角行列 D を用いて

$$P = UDU^T \tag{17}$$

のように分解した形で、作成・更新していく。

(1) 計算開始時の設定

計算開始時刻は、初期時刻 t_0 である。この時刻では、未知入力ベクトル $X(t_0)$ は、初期条件そのものであり、

$$X(t_0) = S \tag{18}$$

であると考える。したがって、

$$J(t_0) = N_s \tag{19}$$

である。この時点 t_0 では、既知入力ベクトル $C(t_0)$ の次元は、$K_{t_0} - J(t_0) + N_S$ を計算すると 0 である。 このことを、

$$C(t_0) = \emptyset \tag{20}$$

と表す。右辺は、大きさ 0 のベクトルを表す。これに対応して、既知入力ベクトル $C(t_0)$ の推定値ベクトルも大きさは 0 である。

$$\bar{C}(t_0) = \emptyset \tag{21}$$

以上から、$X(t_0)$ の推定値を $\hat{X}(t_0)$ と推定誤差の共分散行列 $\hat{P}(t_0)$ は、つぎのように表される。

$$\hat{X}(t_0) = \bar{S} \tag{22}$$

$$\hat{P}(t_0) = P_S \tag{23}$$

(2) 降雨の観測値の入手とその処理

現在時刻を t とする。時刻 $t - \Delta t$ から時刻 t までの降雨量 $R(1, t)$ が得られていないとして、未知入力ベクトル $X(t - \Delta t)$ の時刻 $t - \Delta t$ までの情報を用いた推定値 $\hat{X}(t - \Delta t)$, 推定誤差の共分散行列 $\hat{P}(t - \Delta t)$ が与えられているとする。また、既知入力ベクトルの推定値 $\bar{C}(t - \Delta t)$ が与えられているとする。この条件は、現在時刻 t が $t_0 + \Delta t$ のときにも、満たされている。その式が (19) 式、(21) 式、(22) 式、(23) 式である。

$X(t)$ は $X(t - \Delta t)$ に降雨量 $R(1, t)$ を追加して、次のように構成される。

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_{J(t)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1, t) \\ X_1(t - \Delta t) \\ \vdots \\ X_{J(t-\Delta t)}(t - \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1, t) \\ X(t - \Delta t) \end{bmatrix} \tag{24}$$

従って、未知入力ベクトル $X(t)$ の次元 $J(t)$ は、

$$J(t) = J(t - \Delta t) + 1 \tag{25}$$

になる。

現在時刻 t になって、降雨量 $R(1,t)$ の観測値 $\bar{R}(1,t)$ と、その観測誤差分散 $\sigma^2_{R(1,t)}$ が与えられると、未知入力ベクトル $X(t)$ の推定値 $\tilde{X}(t)$ と推定誤差の共分散行列 $\tilde{P}(t)$ は

$$\tilde{X}(t) = \begin{bmatrix} \bar{R}(1,t) \\ \hat{X}(t-\Delta t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\tilde{P}(t) = \left[\begin{array}{c|ccc} \sigma^2_{R(1,t)} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{P}(t-\Delta t) & \\ 0 & & & \end{array}\right] \tag{27}$$

によって計算できる。ここで、降雨量 $R(1,t)$ の観測誤差は、それまでの入力ベクトル $X(t-\Delta t)$ の推定誤差とは無相関であると仮定し、$\tilde{P}(t)$ の 1 行 1 列目の要素を除く 1 行目と 1 列目の要素は全て 0 としている。*UD* フィルターを用いる場合は、(27) 式に対応して、$\hat{P}(t-\Delta t)$ の *UD* 分解から、$\tilde{P}(t)$ の *UD* 分解を求めるアルゴリズムが必要であるが、その実現は容易である。

降雨量 $R(1,t)$ を追加して、未知入力ベクトルは、$X(t-\Delta t)$ から $X(t)$ に変化するが、既知入力ベクトルの方は変化しないから、$C(t-\Delta t)$ がそのまま $C(t)$ になる。その推定値も $\bar{C}(t-\Delta t)$ がそのまま $\bar{C}(t)$ になる。

(3) 未知入力ベクトルの線形式による流出量の表現

流出量 $q(t)$ は、入力ベクトル $I(t)$ の関数として (8) 式のように表現されるが、入力ベクトル $I(t)$ の前の方の $J(t)$ 個の成分からなる未知入力ベクトル $X(t)$ だけが不確かであると考え、それ以外の既知確定値としてよいとした既知入力ベクトル $\bar{C}(t)$ と併せて、

$$q(t) = F\left(\begin{bmatrix} X(t) \\ C(t) \end{bmatrix}\right) \doteqdot F\left(\begin{bmatrix} X(t) \\ \bar{C}(t) \end{bmatrix}\right) \tag{28}$$

と近似する。

一般には $q(t)$ は、未知入力ベクトル $X(t)$ の非線形関数である。本研究では、$X(t), C(t)$ が入力として与えられれば、$q(t)$ の推定値が得られる流出モデルを仮定している。その流出モデルを利用して $q(t)$ を、

$$q(t) \doteqdot a_0 + \sum_{i=1}^{J(t)} a_i(X_i(t) - \tilde{X}_i(t)) + \epsilon \tag{29}$$

と統計的に近似して、線形式で表現する。ただし、a_0, $a_1, \ldots, a_{J(t)}$ は、線形化誤差分散

$$J(a_0,\ldots,a_{J(t)}) = E\left\{\left|q(t) - \left(a_0 + \sum_{i=1}^{J(t)} a_i(X_i(t) - \tilde{X}_i(t))\right)\right|^2\right\} \tag{30}$$

を最小にするように決定された係数であり、ϵ は線形化の際に生じる誤差項であり、ϵ の期待値は 0 であることが知られている。$\tilde{P}(t)$ が *UD* 分解されていれば、係数 $a_0, a_1, \ldots, a_{J(t)}$ と 線形化誤差 ϵ の分散 σ^2_ϵ は、エルミートガウス積分公式を用いて決定できる [3)]。

このように流出量 $q(t)$ を統計的に線形化することにより、$q(t)$ が未知入力ベクトル $X(t)$ の非線形関数であるような流出モデルを用いる場合でも、$q(t)$ を降雨量系列の 1 次式で表現できるようになる。

(4) 未知入力ベクトルの次元縮小

未知入力ベクトルの個数 $J(t)$ を、入力ベクトルを推定するための計算処理がそれほど多くならずに処理できる範囲に収めるために、未知入力ベクトルの次元縮小について考える。

流出量 $q(t)$ に対して、未知入力ベクトル $X(t)$ が及ぼす影響は、(29) 式の第 2 項で表現されており、$J(t)$ 個の未知入力ベクトル $X(t)$ の不確かさによって説明される流出量 $q(t)$ の分散 V_a は、

$$h = \tilde{U}^T a \tag{31}$$

$$V_a = \sum_{i=1}^{J(t)} \tilde{d}_i h_i^2 \tag{32}$$

と表される。ただし、$\tilde{U}\tilde{D}\tilde{U}^T$ は $\tilde{P}$ の *UD* 分解行列であり、$\tilde{d}_i$ は $\tilde{D}$ の (i,i) 成分である。また、a は、(29) 式右辺に表れる係数 $a_1, \ldots, a_{J(t)}$ から成る列ベクトルである。

$\tilde{U}$ が上三角行列であることに注意すると、(29) 式右辺の第 2 項で、$X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{J(t)}$ をそれぞれそれらの推定値 $\hat{X}_{k+1}, \hat{X}_{k+2}, \ldots, \hat{X}_{J(t)}$ に等しいと置いて、最初の k 個、$X_1(t), \ldots, X_k(t)$ の不確かさの影響だけを考えたときの分散 V_{ak} は、

$$V_{ak} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{d}_i h_i^2 \tag{33}$$

と表されることが分かる。

未知入力ベクトルの次元を縮小するルールとしては種々考えられるが、ひとつの方法として、$0 < \lambda < 1$ で 1 に近い λ を取り、縮小後でも説明される分散 $V_{aJ(t)'}$ が元の分散 V_a に λ を乗じた分を説明できれば、それでよいとする方法が考えられる。すなわち、

$$V_{aJ(t)'} > \lambda V_a \tag{34}$$

が成り立てば、未知入力の次元を $J(t)'$ に縮小するという方法が考えられる。

また流出モデルによっては流出量を推定する際に、その流出量の推定値が過去の決められた個数の降雨量にしか依存しないものもある。そのような流出モデルを使用する場合は、流出量の推定に影響を与える降雨量系列の次元を $\alpha_{\max}$ とし、未知入力ベクトルの次元 $J(t)$ が $\alpha_{\max}$ より大きくなったとき、未知入力ベクトルの次元を $\alpha_{\max}$ に縮小する方法も考えられる。

本研究では、$\alpha_{\max}$ を用いる方法を基本として、さらに、λ を用いて次元を縮小するときは、$\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$ である整数 $\alpha_{\min}$ を指定して、$J(t) > \alpha_{\min}$ であれば、λ を用いる次元縮小法も適用することとした。

このようにして、次元を $J(t)'$ に縮小された未知入力ベクトルを $X(t)'$ と表すことにする。これに対応して、次元が拡大された既知入力ベクトルを $C(t)'$ と表すことにする。これらの関係は、

$$I(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t)' \\ C(t)' \end{bmatrix} \tag{35}$$

のように表される。

$X(t)'$ の推定値 $\tilde{X}(t)'$ は、$\tilde{X}(t)$ の最初の $J(t)'$ 個の成分の部分ベクトルである。

$X(t)'$ の推定値 $\tilde{X}(t)'$ による推定誤差の共分散行列 $P(t)'$ は、$X(t)'$ の周辺分布としての共分散行列を求めるのではなくて、縮小して考慮されなくなった成分がすべて推定値に等しいという条件を付けた確率分布の共分散行列を求めることとする。その場合は、元の $X(t)$ の共分散行列の UD 分解行列の部分行列が、対応する UD 分解であることを証明することができる。

既知入力ベクトル $C(t)'$ の推定値 $\bar{C}(t)'$ は、

$$\bar{C}(t)' = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{J(t)'+1}(t) \\ \tilde{X}_{J(t)'+2}(t) \\ \dots \\ \tilde{X}_{J(t)}(t) \\ \bar{C}(t) \end{bmatrix} \tag{36}$$

として与えられる。最初の $J(t) - J(t)'$ 個の成分が、未知入力ベクトルが縮小した分に対応して拡大している。

$q(t)$ を表現する式の右辺で、$i > J(t)'$ である i に対しては、$X_i(t)$ を $\tilde{X}_i(t)$ と置き換えてよいから、この時点では、

$$q(t) \doteqdot a_0 + \sum_{i=1}^{J(t)'} a_i(X_i(t) - \tilde{X}_i(t)) + \epsilon \tag{37}$$

と考える。

(5) 流出量観測値の入手と更新計算

時刻 t で、次元 $J(t)'$ の未知入力ベクトル $X(t)'$ の推定値 $\tilde{X}(t)'$ と推定誤差の共分散行列 $\tilde{P}(t)'$ が与えられているとし、$q(t)$ は、(37) 式 で表されるとする。

この項では、改めて

$$J(t) := J(t)' \tag{38}$$
$$X(t) := X(t)' \tag{39}$$
$$C(t) := C(t)' \tag{40}$$
$$\tilde{X}(t) := \tilde{X}(t)' \tag{41}$$
$$\tilde{P}(t) := \tilde{P}(t)' \tag{42}$$
$$\bar{C}(t) := \bar{C}(t)' \tag{43}$$

と書くことにする。全て、右辺を左辺の記号で表すことにする。

その後、時刻 t の流出量の観測値 $y(t)$ が得られると、観測式 (10) により $y(t)$ には

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{J(t)} a_i(X_i(t) - \tilde{X}_i(t)) + \epsilon + w_t \tag{44}$$

という関係があるから、

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_{J(t)}) \tag{45}$$

とおくと、この $y(t)$ が得られた後の $X(t)$ の推定値 $\hat{X}(t)$ と推定誤差の共分散行列 $\hat{P}(t)$ は、カルマンフィルター理論から、

$$\hat{X}(t) = \tilde{X}(t) + \tilde{P}(t)A^T(A\tilde{P}(t)A^T + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_{w_t}^2)^{-1}(y(t) - a_0) \tag{46}$$

$$\hat{P}(t) = \tilde{P}(t) - \tilde{P}(t)A^T(A\tilde{P}(t)A^T + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_{w_t}^2)^{-1}A\tilde{P}(t) \tag{47}$$

のように更新計算して求めることができる。実際には、対応する UD フィルターの更新アルゴリズムに従って、UD 分解行列を更新する。

4. 適用例

(1) 単位図法への適用

最初に、本研究の手法が正常に機能しているかを確認するために、単位図法を集中型モデルとして採用した。その結果、統計的線形化によって、与えた単位図が正確に推定できることを確認した[4)]。つまり、線形のモデルで現象が表現できる場合、それを隠して、非線形集中型モデルと想定して統計的に線形化したときに与えた手法がうまく機能することが示された。

(2) 貯留関数法への適用

つぎに、貯留関数法を集中型モデルとして採用した場合の適用結果を紹介する。適用した貯留関数法のパラメタは、遅滞時間を 2 時間とし、貯留高を s (mm)、流出高を q_h (mm/hour) として $s = Kq_h{}^p$ と表したとき $p = 0.5$, $K = 5.0\mathrm{mm(mm/h)}^{-p}$ とし、流域面積を 300 km^2 とした。また、$\alpha_{max} = 9$, $\lambda = 0.9$ とした。

a) 降雨、流出量の真値とその観測値系列

本手法の有効性を確認するために、まず、真の降雨系列を作成し、真の降雨系列に対応して貯留関数モデルによって求められる流出量系列を真の流出量とした。次いで、降雨系列に対して降雨観測誤差、流出量に対して流出量観測誤差をランダムに発生して加え、それらを降雨の観測値系列、流出量の観測値系列とした。降雨の観測値系列には正のバイアスがあるとし、対数正規分布にしたがうとし、流出量の観測誤差にはバイアスはなく、平均 0 の正規分布にしたがうとした。図-1 に、作成した「真」の降雨量系列、流出量系列、ランダムノイズを加えて作成した「観測」した降雨量系列、流出量系列を示す。誤差の標準偏差は降雨や流量の規模に比例するようにとったが、標準偏差の値は予測する側には既知とした。

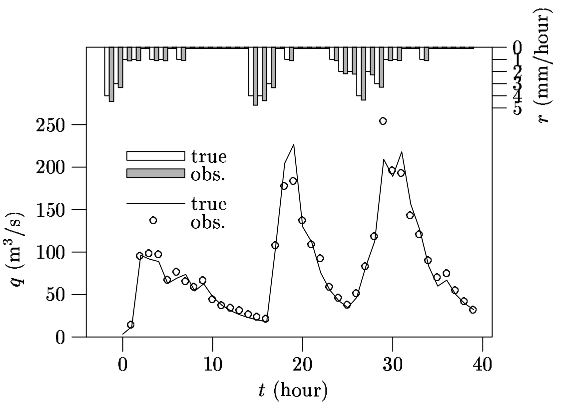

図-1 降雨、流出量の真値と観測値系列

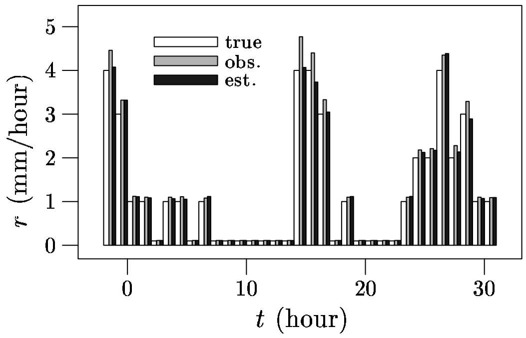

図-2 逆推定した降雨量系列

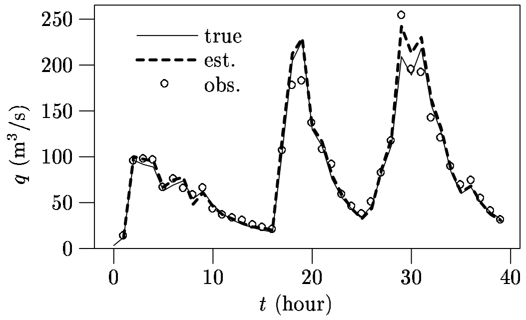

図-3 逆推定した降雨量による流出量

b) 逆推定した降雨量系列

真の降雨量系列、流出量系列を隠して、観測降雨量系列、観測流出量系列を与えて、本研究の手法で逆推定した降雨量系列を、真の降雨量系列、観測降雨量系列とともに図-2 に示す。推定した降雨量が、観測降雨より真の降雨量に近いことが分かる。27 時間目の降雨強度の推定がうまくいっていないが、それは、ランダムに発生させた流出量観測誤差がそこで極端に大きくなっているために、精度が悪くなったものである。

c) 逆推定した降雨量による流出量

各時刻で、それまでの降雨観測値と流出量観測値とを使って、現在時刻の流出量を再計算した値を、真の流出量系列、観測した流出量系列とともに図-3 に示す。

d) 推定された統計的単位図

各時刻で求められた未知入力ベクトルの線形式の係数 $a_1, a_2, \ldots, a_{J(t)}$ (単位は、$(\mathrm{m^3/sec})/(\mathrm{mm/h})$ である) は、現在の流出量を過去の降雨系列の積和で表したときの係数列であって、システムが線形であれば単位図に相当し、言わば「統計的に求められた単位図」とも言える。これを降雨強度 (単位は mm/h) とともに示したのが図-4 である。遅滞時間を 2 時間としたのを検知して統計的単位図も最初の 2 時間のところが 0 になっている。降雨強度が大きいところで単位図が大きく速く流出するようになり、降雨強度が小さいところで、単位図が小さくなっている。

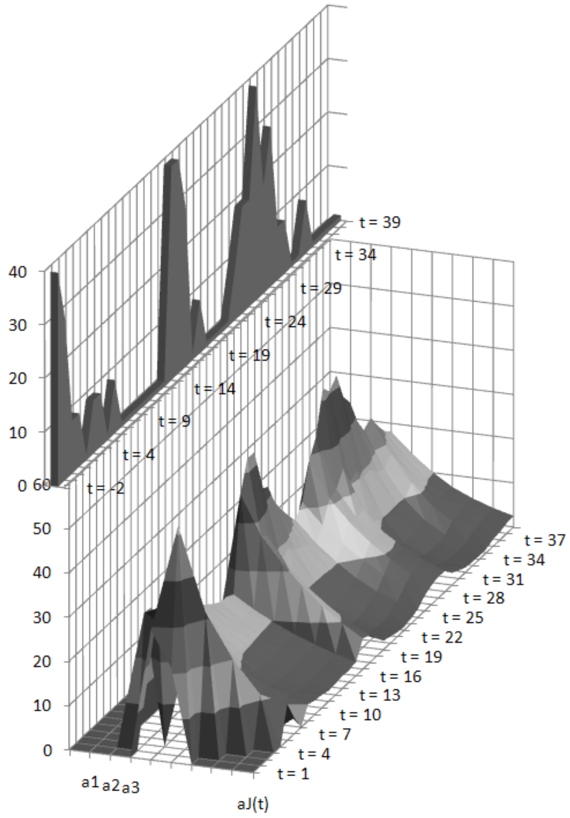

図-4 推定された統計的単位応答関数

5. 結論

本研究で提案した方法を単位図法、貯留関数法に適用した結果、この手法が理論的にも正当な挙動を示すことが確認された。今後は、実流域へ適用した結果を報告したい。

参考文献

1) 日野幹雄・金治弘: フィルター分離 AR 法とカルマンフィルターによる洪水予測法に関する研究, 土木学会論文集、第 351 巻,pp.155–162, 1974.
2) Bierman, G. J.: Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New York, 1977.
3) 高棹琢馬・椎葉充晴: 洪水流出予測の基礎理論とサブルーチンパッケージ – UD 分解手法と統計的二次近似理論の適用を中心として、昭和 57・58 年度科学研究費補助金研究成果報告書「洪水の短時間予知手法とその実際化に関する研究、1984.
4) 永田卓也・椎葉充晴・立川康人: 降雨の逆推定による実時間流出予測手法の開発, 平成 21 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集, II-69, 2009.

(2009.9.30 受付)