土木学会論文集B1(水工学) Vol.68, No.4, I_1381-I_1386, 2012.

SLSCによる水文頻度解析モデル適合度評価への統計的仮説検定の導入

INTRODUCING A STATISTICAL HYPOTHESIS TESTING INTO SLSC GOODNESS-OF-FIT EVALUATION FOR HYDROLOGICAL FREQUENCY ANALYSIS MODELS

林 敬大[1]・立川康人[2]・椎葉充晴[3]・萬 和明[4]・Kim Sunmin[5]
Hiromasa HAYASHI, Yasuto TACHIKAWA, Michiharu SHIIBA, Kazuaki YOROZU, and Sunmin KIM

[1] 学生会員 学（工） 京都大学修士課程 大学院工学研究科（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1）
[2] 正会員 博（工） 京都大学准教授 大学院工学研究科（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1）
[3] 正会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1）
[4] 正会員 博（工） 京都大学助教 大学院工学研究科（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1）
[5] 正会員 博（工） 京都大学講師 大学院工学研究科（〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1）

A goodness-of-fit evaluation for hydrologic frequency models using SLSC (Standard Least Squares Criterion) is widely used in Japan. As the critical value to the SLSC goodness-of-fit evaluation, 0.03 is usually used. However, the critical value is recognized as a variable depending on a sample size of hydrologic data and a hydrologic frequency model. In this study, statistical characteristics of SLSC is examined. Then, based on the analysis, a statistical hypothesis testing is introduced into the SLSC goodness-of-fit evaluation for hydrological frequency analysis models.

Key Words: *hydrological frequency analysis, statistical hypothesis testing, null hypothesis, composite hypothesis, goodness-of-fit, SLSC, monte carlo simulation*

1. はじめに

河川計画を策定する際，観測された極値水文データをある確率分布に従う母集団の実現値であるとした上で，候補に挙げられる水文頻度解析モデル群から最も良いモデルを選択し，確率水文量を推定して想定外力を定める手法が一般的に用いられている．その際，水文頻度解析モデルを選択するための何らかの評価規準が必要となる．

我が国では，宝・高棹[1)]によって提案されたSLSC (Standard Least Squares Criterion，標準最小二乗規準) を用いる手法が広く利用されている．この手法では，SLSC の値がある基準値を上回る水文頻度解析モデルを候補から除外し，次に候補に残ったモデルから得られる確率水文量の安定性を Jackknife 法あるいは Bootstrap 法によるリサンプリング手法によって評価して，確率水文量の推定値のばらつきが最も小さいモデルを選択する．

このとき，水文頻度解析モデルの選択規準に用いる SLSC の基準値をどう定めるかは，注意を要すると考える．葛葉[2)]は，データのサンプル数が大きくなるにつれて SLSC の値はより小さな値をとりやすくなることをモンテカルロシミュレーションによって示し，SLSC によって適合度を評価する際にはサンプル数を考慮に入れる必要があることを指摘した．SLSC によって適合度を評価する際，基準値として 0.03 ではなく 0.04 という値が用いられることもあるようである．これは，田中・宝[3)]が河川流量の極値データに多数の水文頻度解析モデルを当てはめた結果，SLSC が 0.03 以下となる場合が少なく，0.04 という値で適合度の十分性を評価すべきであると指摘したためであると考えられる．

田中・宝[3)]は SLSC が 0.03 以下となる場合が少ない原因として，河川水位から水位流量曲線を用いて換算した河川流量のデータ特性にその理由を求めているが，そのときのデータサンプル数に着目すると興味深い考察ができる．宝・高棹[1)]で扱われた水文データのサンプル数は，大阪の年最大日降水量が 92 個，大津・彦根の年最大 k 日降水量 ($k = 1, 2, 3$) がそれぞれ 74 個，琵琶湖流域平均の年最大 k 日降水量 (k=1, 2, 3) が 70 個であり，平均して標本数は 75 個程度である．これに対して田中・宝[3)]で扱われた水文データのサンプル数は，標本数が 40 ～ 44 個のデータが 40 地点， 35 ～ 39 個あるいは 45 ～ 49 個あるものがそれぞれ 18 地点，平均して標本数は 42 個程度である．このサンプル数の違いのために田中・宝[3)]が扱った流量データでは SLSC の値が宝・高棹[1)]と比べて大きくなり，基準値を 0.03 か

ら 0.04 にする必要があった可能性がある．

SLSC による適合度評価が十分にされるためには，サンプル数を考慮に入れた新しい適合度評価が必要になると考える．そこで本論では，サンプル数による SLSC の統計的特性を分析したうえで，サンプル数を考慮に入れた統計的仮説検定の考え方を SLSC による水文頻度解析モデルの適合度評価に導入することを試みる．

2. 統計量として見た SLSC の分布特性

(1) SLSC の概要

SLSC は，確率紙においてプロットされたサンプルデータの直線性を定量的に評価するための指標であり，異なるモデルに対しても適合度を同じ指標で統一的に評価できるように配慮されている．SLSC の値 S_c は次式で与えられる．

$$S_c = \frac{\sqrt{\xi^2_{min}}}{|s_q - s_{1-q}|} \tag{1}$$

$$\xi^2_{min} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_{(i)} - s^*_{(i)})^2 \tag{2}$$

ここに，$s_{(i)}$ はサンプルデータ $x_i(i = 1, \ldots, N)$ を小さい順に並べ替えた順序統計量 $x_{(i)}$ を

$$s_{(i)} = \frac{x_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \tag{3}$$

によって標準化した標準変量，$\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$ はそれぞれサンプルデータに対して推定される位置母数，尺度母数，s_q，s_{1-q} はそれぞれ非超過確率 q，$1 - q$ に対する標準変量である．一般的に $q = 0.99$ として用いられているため，本研究でもそれに倣うことにする．

また，$s^*_{(i)}$ は位置母数を 0，尺度母数を 1 とした場合の水文頻度解析モデルに従うサンプルデータを小さい順に並べかえた標準変量の期待値である．$s^*_{(i)}$ は，水文頻度解析モデルに対応するプロッティングポジション公式

$$P_i = \frac{i - \alpha}{N + \beta} \tag{4}$$

を用いて，

$$s^*_{(i)} = F^{-1}(P_i) \tag{5}$$

によって求められる．ここで，$F(\boldsymbol{.})$ は位置母数を 0，尺度母数を 1 とした場合のモデルの確率分布関数である．

(2) 母数の与え方による SLSC の分布の違い

正規分布を例として SLSC の確率密度関数をモンテカルロシミュレーションによって経験的に得ることを考える．葛葉[2] はモデルの母数を，データを発生させる正規分布の母数と同じものとした場合の SLSC の分布を求めたが，それに加えてモデルの母数をサンプルデータから推定する場合の SLSC の分布も求める．議論を明確にするために，モデルの確率分布関数を $F(x|\boldsymbol{\theta})$ で表し，サンプルデータに対して推定された母数を $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ で表すことにする．また，母集団の従う確率分布を「真の分布」とよび，その確率分布関数を $G(x|\boldsymbol{\Theta})$ で表すことにする．真の分布がもつ母数は固定されていると想定し，その母数を $\boldsymbol{\Theta}^*$ で表す．以下，**a)** では $F(x|\boldsymbol{\theta}) \equiv G(x|\boldsymbol{\Theta})$ かつ $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}^*$ であるときの SLSC の確率分布を，**b)** では $F(x|\boldsymbol{\theta}) \equiv G(x|\boldsymbol{\Theta})$ であるときの SLSC の確率分布を，正規分布の場合について求める．

a) モデルの母数を固定母数とする場合

$F(x|\boldsymbol{\theta}) \equiv G(x|\boldsymbol{\Theta})$ かつ $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}^*$ とした場合，想定するモデルの分布は真の分布と全く同じものとなるが，サンプルデータによって，モデルの適合度を表す SLSC の値は異なる．すなわち SLSC は確率変数であり，統計量として扱う必要があることがわかる．

そこで，SLSC の分布特性を論じるために，葛葉[2] を参考にして SLSC の確率密度関数を経験的に求めることを考える．具体的には以下の手順を踏む．

1. 標準正規分布 N(0, 1) から N 個のサンプルデータ $\boldsymbol{x}^j$=$(x^j_1, x^j_2, \ldots, x^j_N)$ を発生させる．j は繰り返し回数を意味する添え字である．
2. 手順 1 で発生させたデータの確率分布モデルとして，真の分布と同じ正規分布で，なおかつ真の分布と同じ母数をもつ標準正規分布モデルを想定する．
3. 手順 1 のデータに対する標準正規分布モデルの適合度を表す SLSC の値 $S_{c,j}$ を求める．
4. 手順 1 〜 3 の試行を 10000 回繰り返し，$S_{c,j}(j = 1, 2, \ldots, 10000)$ を得る．
5. 10000 個の $S_{c,j}$ の相対度数ヒストグラムを作成し，近似的に SLSC の確率密度関数を得る．

これは，真の分布と同じ母数を固定母数として与えたモデルをサンプルデータに対して想定したときの SLSC の確率密度関数であるが，実は一般に，真の分布のもつ母数を $\mu = 0$，$\sigma = 1$ ではなく $\mu = \mu^*$，$\sigma = \sigma^*$ （$-\infty < \mu^* < \infty$，$0 < \sigma^* < \infty$）としても SLSC の分布は同じものになる．なぜなら，SLSC の値を求める際には，サンプルデータは標準化されるため，結局真の分布のもつ母数を変えても SLSC の分布は変わらないためである．

図-1 は上記の手順によってもとめた SLSC の確率密度関数である．プロッティングポジション公式として Cunnane 式（(4) 式で $\alpha = 0.4$，$\beta = 0.2$）を採用した．**図-1** を見ると，SLSC の確率密度関数はデータのサンプル数が増えるに従って，期待値，分散がともに小さくなり，分布は左にシフトする．この結果をふまえて，葛葉[2] はサンプル数に応じて異なる SLSC の基準値を用いるべきであることを指摘し，SLSC を確率分布する統計量として捉え，設定した SLSC の基準値の分位値を示した．

b) モデルの母数を自由母数とする場合

a) では，想定する正規分布モデルの母数は N($\mu = \mu^*$,

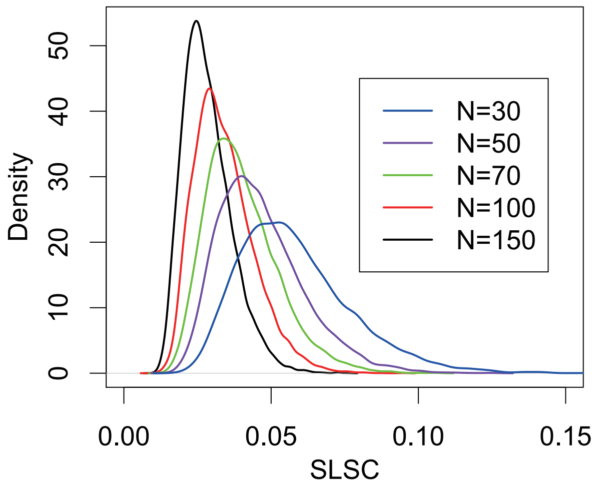
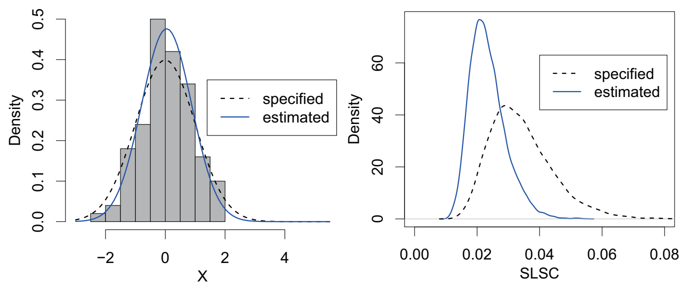


図-1 シミュレーションによって得た正規分布の場合の SLSC の確率密度関数．N はデータのサンプル数であり，N が大きくなるにつれて，分布は左にシフトする．



(a) サンプルデータとモデル．　(b) SLSC の確率密度関数．

図-2 真の分布と同じ母数を固定母数として与えた場合（specified）と，モデルの母数を最尤推定した場合（estimated）の SLSC の比較．真の分布を標準正規分布としサンプル数を 100 個とした場合．

$\sigma = \sigma^*$) としてあらかじめ固定した結果を示した．しかし実際に水文データを確率分布モデルに当てはめる場合は，母数は未知であり，サンプルデータに対して積率法や PWM 法，最尤法などの何らかの母数推定法によって母数を推定することが一般的である．そこで，ここでは確率分布モデルの母数を **a)** のように固定するのではなく，推定するものとして考える．この場合の SLSC の確率分布も，**a)** の手順と同様にして求めることができる．ただし，モデルの母数は発生させたサンプルデータに対してその都度推定し，その求めた母数を持つ確率分布モデルに対して SLSC を求める．

このときの SLSC の確率分布は，**図-1** で求めたものとは異なる．一般に，サンプルデータに対して推定された母数をもつモデルは，母集団の従う真の分布よりもサンプルデータに対して適合度が良い．**図-2**(a) において，真の分布と同じ母数をもつモデル（黒い破線のグラフ）の SLSC の値は 0.036 であるのに対し，推定された母数をもつモデル（青い実線のグラフ）の SLSC の値は 0.014 である．そのため，**図-2**(b) が示すように，母数を推定する場合の SLSC の確率密度関数は期待値，分散がともに小さくなり，左にシフトする．

(3) モデルが異なる場合の SLSC の分布の違いについて

a) 正規分布の場合と Gumbel 分布の場合の比較

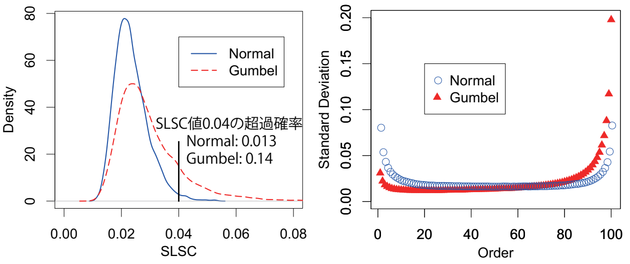
水文頻度解析によく用いられるモデルには正規分布，対数正規分布，Gumbel 分布，GEV 分布，ピアソン 3 型分布，対数ピアソン 3 型分布など，形状の異なる様々な分布がある．現行の SLSC による適合度評価手法では，観測されたデータに対していずれのモデルを想定する場合にも，ある定められた SLSC の基準値（ 0.03 や 0.04 ）より小さいか否かで適合度を評価する．SLSC の値が基準値を超える場合には，想定されたモデルは「適合度が不十分である」として候補モデル群から外される．もし当てはめる確率分布モデルによって SLSC の分布が異なるならば，同じ SLSC の基準値を用いると基準値の超過確率も異なる．

そのため，想定するモデルによって SLSC の分布が変わるか否かについても，データのサンプル数の問題と同様に注意深く考える必要がある．SLSC の分子だけを適合度の評価指標とすると，確率分布モデルによって（標準）順序統計量 $s_{(i)}$ のばらつきの様子が大きく異なるため，想定するモデルによって適合度の評価指標の分布が変わることになる．SLSC はこの点を考慮して，モデルの分布の広がりを表す $|s_q - s_{1-q}|$ で分子を除算することによって，ある程度モデルの違いを排除している．しかしながら，実際にはこの操作だけでは，モデル間の評価指標の分布の統一化が十分になされない．この事実を示すために，2(2)b) と同様の手順によって，Gumbel 分布の場合の SLSC の確率分布を求め，正規分布の場合と比較する．

図-3(a) はサンプル数 100 のときの，正規分布の場合と Gumbel 分布の場合の SLSC の確率密度関数である．図を見ればわかるように，Gumbel 分布のほうが下に潰れた格好になっている．SLSC 値 0.04 の超過確率は，正規分布の場合 0.013，Gumbel 分布の場合 0.14 であり，正しいモデルを誤って候補から外してしまう確率は，Gumbel 分布のほうが正規分布に比べて 10 倍程度大きく，Gumbel 分布の場合のほうが適合度の評価として厳しい．このことからわかるように，異なる確率分布モデルに対して，SLSC による適合度評価は公平な判断を下しているとはいえない．

b) 順序統計量の分散の点からの考察

図-3(b) は，縦軸に SLSC の (1) 式，(2) 式における順序統計量 $s_{(i)}/|s_{0.99} - s_{0.01}|$ の標準偏差を，横軸にその順序を表している．図が示すように，裾が長いところで $s_{(i)}/|s_{0.99} - s_{0.01}|$ の値が大きくなっていることがわかる．Gumbel 分布のような右裾の長い分布では，特にその部分で $s_{(i)}$ のばらつきが大きくなり，$|s_{0.99} - s_{0.01}|$ で除算してもなおモデルの形状の違いによる影響を打ち消すことができていない．結果として SLSC の値も正規分布の場合に比べて大きくばらつくことになり，**図-3**(a) のように SLSC の確率密度関数の右裾が厚くなる．



(a) SLSC の確率密度関数.　(b) $s_{(i)}/|s_{0.99} - s_{0.01}|$ の標準偏差.

図-3 モデルの母数を最尤推定した場合の正規分布と Gumbel 分布の比較．サンプル数は 100 とした．

3. SLSC を検定統計量とした適合度の統計的仮説検定の導入

既に述べたように，現行の手法のようにある定められた基準値で適合度を評価する場合に，SLSC の確率分布が異なれば，その基準値の超過確率，すなわち適合度の評価としての厳しさが異なることになる．そこで，SLSC の基準値を固定するのではなく，葛葉[2)] が指摘するように，超過確率をある基準で固定し，その超過確率に対応する SLSC の値を適合度評価の基準値として利用し，異なるサンプル数やモデルに対しても適合度を統一的に評価することを考える．SLSC の確率分布は **2.** の手順で得ることができるので，以降では SLSC を検定統計量とした適合度の統計的仮説検定の導入を試みる．

(1) 適合度の統計的仮説検定の概要

a) 有意水準と第一種の過誤

サンプルデータに対してある仮説が正しいと主張できる場合にも，そのサンプルデータの母集団に対して同じ仮説が正しいと主張できるとは限らない．サンプルデータがその仮説にとって偶然都合の良いものであった可能性が否定できないためである．そこで，母集団に関してもその仮説が妥当であることを統計的に検証する必要性が生じる．そのための有力な手法が統計的仮説検定である．

以下では，SLSC による適合度評価への統計的仮説検定の導入を試みる．すなわち，SLSC を検定統計量として捉えなおし，有意水準 α に対応する SLSC の棄却域を各モデル，各サンプル数に対して求め，第一種の過誤（正しいモデルを想定しているのにそれを棄却してしまう過誤）を起こす確率を異なるサンプル数や異なる確率分布モデルに対して統一的に評価することを考える．

b) 単純仮説と複合仮説

SLSC の棄却域について具体的に議論する前に，どのような帰無仮説を想定するのかについて確認する．2(2)a) では，モデルの母数は真の分布の母数と同じものを与えていた．この場合の帰無仮説 H_0 は,「真の分布は $N(\mu^*, \sigma^*)$ である」であり，モデルの母数は固定母数である．このような仮説を単純仮説という．これに対し 2(2)b) では，モデルの母数はサンプルデータに対して推定されたものであった．この場合の帰無仮説 H_0 は「真の分布は $N(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ である」であり，モデルの母数空間は点ではなく広がりを持つ．このような仮説を複合仮説という．実際に水文データを扱う場合に，真の分布はわからないため，以降では複合仮説について議論を進める．この場合，採用する母数推定法によって SLSC の棄却域が異なることに注意しなければならない．

(2) 2 母数型モデルに対する SLSC の棄却限界値

ある 2 母数型モデルを水文頻度解析に用いる場合，実際にどのような基準値で適合度を評価すればよいかを統計的仮説検定の立場から明らかにする．**表-1** に，正規分布モデル，Gumbel 分布モデルの場合の SLSC の棄却限界値を示す．上の表は，母集団が正規分布に従うときに，サンプルデータからその分布が正規分布であると想定する場合の判断に用いるものである．サンプル数 N，有意水準 α を設定し，それに対応する SLSC をまとめている．この表からサンプル数，想定する確率分布モデル，設定する有意水準によって，SLSC の基準値を定めればよい．母数推定法としては積率法，PWM 法，最尤法の 3 つをとりあげた．また，プロッティングポジション公式にはいずれも Cunnane 公式を用いた．**表-1** に示すように，母数推定法による違いは極めて小さい．

対数正規分布モデルを想定する場合には，データを対数変換すればそのデータは正規分布に従う．そのため，対数正規分布モデルに対する SLSC の確率分布は正規分布モデルに対する SLSC の確率分布と変わらず，正規分布モデルについてのみ考えれば事足りる．

(3) 3 母数型モデルの場合

水文頻度解析においてよく扱われる 3 母数型モデルとしては，3 母数対数正規分布，GEV 分布，ピアソン 3 型分布，対数ピアソン 3 型分布が挙げられる．これらのモデルに対して，2 母数の場合と同様にして SLSC を検定統計量とした適合度評価に統計的仮説検定を導入することは容易ではない．

3 母数対数正規分布は，通常扱われる 2 母数の対数正規分布に新たなシフト母数 c を加え，x 軸に関して平行移動できるようになっている．$c \neq 0$ である場合には，サンプルデータを対数化しても正規分布には従わない．サンプルデータからそれぞれ c を減算した $x_i - c$ を対数化すれば正規分布に従うが，それは母数 c の真値 c^* を知り得た場合である．推定された母数 $\hat{c}$ はわかったとしても，その値は真値 c^* ではないため，$x_i - \hat{c}$ を対数化しても正規分布に従うという保証はない．

GEV 分布，ピアソン 3 型分布，対数ピアソン 3 型分

表-1 正規分布モデル（上），Gumbel 分布モデル（下）における SLSC の基準値（棄却限界値）．

Normal distribution (using Cunnane equation)															
Sample	Moment Method					PWM Method					MLE Method				
Size	Significance Level α					Significance Level α					Significance Level α				
N	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01
10	0.058	0.064	0.073	0.082	0.098	0.057	0.063	0.074	0.085	0.106	0.063	0.068	0.078	0.086	0.103
20	0.047	0.051	0.058	0.065	0.078	0.047	0.051	0.059	0.066	0.083	0.049	0.053	0.060	0.066	0.079
30	0.041	0.045	0.051	0.056	0.068	0.041	0.045	0.052	0.058	0.072	0.042	0.046	0.052	0.057	0.069
40	0.037	0.040	0.045	0.049	0.059	0.037	0.040	0.046	0.050	0.062	0.038	0.041	0.046	0.050	0.060
50	0.034	0.037	0.041	0.045	0.055	0.034	0.037	0.042	0.046	0.057	0.034	0.037	0.042	0.046	0.055
60	0.032	0.034	0.039	0.043	0.051	0.032	0.035	0.039	0.043	0.052	0.032	0.035	0.039	0.043	0.051
70	0.029	0.032	0.036	0.039	0.047	0.030	0.032	0.036	0.040	0.049	0.030	0.032	0.036	0.040	0.048
80	0.028	0.030	0.034	0.038	0.045	0.028	0.031	0.035	0.039	0.047	0.028	0.031	0.035	0.038	0.046
90	0.027	0.029	0.032	0.036	0.043	0.027	0.029	0.033	0.036	0.044	0.027	0.029	0.033	0.036	0.043
100	0.026	0.028	0.031	0.034	0.040	0.026	0.028	0.031	0.035	0.041	0.026	0.028	0.031	0.034	0.040
110	0.024	0.026	0.030	0.032	0.039	0.024	0.027	0.030	0.033	0.040	0.025	0.027	0.030	0.033	0.039
120	0.024	0.025	0.029	0.031	0.037	0.024	0.026	0.029	0.032	0.038	0.024	0.026	0.029	0.031	0.037
130	0.023	0.025	0.028	0.030	0.036	0.023	0.025	0.028	0.030	0.037	0.023	0.025	0.028	0.030	0.036
140	0.022	0.024	0.027	0.029	0.035	0.022	0.024	0.027	0.030	0.036	0.022	0.024	0.027	0.029	0.035
150	0.021	0.023	0.026	0.029	0.033	0.021	0.023	0.026	0.029	0.034	0.022	0.023	0.026	0.029	0.033
170	0.020	0.022	0.025	0.027	0.032	0.020	0.022	0.025	0.027	0.032	0.020	0.022	0.025	0.027	0.032
200	0.019	0.021	0.023	0.025	0.030	0.019	0.021	0.023	0.025	0.030	0.019	0.021	0.023	0.025	0.030

Gumbel distribution (using Cunnane equation)															
Sample	Moment Method					PWM Method					MLE Method				
Size	Significance Level α					Significance Level α					Significance Level α				
N	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01
10	0.060	0.066	0.075	0.084	0.100	0.057	0.064	0.074	0.086	0.113	0.068	0.078	0.096	0.119	0.176
20	0.050	0.055	0.063	0.070	0.087	0.049	0.054	0.064	0.075	0.102	0.056	0.064	0.079	0.097	0.140
30	0.044	0.049	0.056	0.064	0.083	0.044	0.049	0.058	0.068	0.098	0.049	0.056	0.069	0.084	0.127
40	0.040	0.044	0.051	0.059	0.077	0.040	0.045	0.053	0.063	0.090	0.045	0.051	0.062	0.075	0.109
50	0.038	0.041	0.048	0.054	0.073	0.037	0.042	0.049	0.058	0.083	0.041	0.047	0.057	0.069	0.101
60	0.035	0.039	0.045	0.052	0.068	0.035	0.039	0.047	0.055	0.079	0.039	0.044	0.054	0.065	0.094
70	0.033	0.037	0.042	0.048	0.064	0.034	0.037	0.044	0.051	0.072	0.037	0.042	0.050	0.059	0.083
80	0.032	0.035	0.041	0.047	0.064	0.032	0.036	0.042	0.050	0.072	0.035	0.040	0.048	0.058	0.082
90	0.031	0.034	0.039	0.046	0.061	0.031	0.035	0.041	0.048	0.069	0.034	0.038	0.046	0.056	0.079
100	0.030	0.033	0.039	0.044	0.060	0.030	0.034	0.040	0.047	0.067	0.033	0.037	0.045	0.054	0.076
110	0.028	0.031	0.037	0.042	0.057	0.029	0.032	0.038	0.045	0.064	0.031	0.035	0.042	0.051	0.071
120	0.028	0.031	0.036	0.042	0.056	0.028	0.031	0.037	0.044	0.062	0.031	0.034	0.041	0.050	0.069
130	0.027	0.030	0.035	0.040	0.055	0.027	0.030	0.036	0.042	0.061	0.030	0.033	0.040	0.048	0.068
140	0.026	0.029	0.034	0.039	0.054	0.026	0.029	0.035	0.041	0.060	0.029	0.032	0.039	0.047	0.067
150	0.026	0.028	0.033	0.038	0.052	0.026	0.029	0.034	0.040	0.057	0.028	0.032	0.038	0.045	0.064
170	0.025	0.027	0.032	0.037	0.049	0.025	0.028	0.033	0.038	0.054	0.027	0.030	0.036	0.043	0.060
200	0.023	0.026	0.030	0.035	0.047	0.023	0.026	0.031	0.036	0.051	0.025	0.029	0.034	0.041	0.056

布に関しても同じことがいえる．これらの分布は位置母数，尺度母数に加え，形状母数 ξ を持つ．例として，GEV 分布について考える．$\xi = 0$ のとき，GEV 分布は Gumbel 分布と一致する．ξ の値が大きいほど，分布の右裾は厚くなる．**図-4** は，GEV 分布の場合の SLSC の確率密度関数である．ただし，形状母数は $\xi = 0, 0.1$, $0.2, 0.3$ の 4 つの場合を用意している．モデルの形状母数は真の分布と同じものを与えており，他の位置母数，尺度母数はサンプルデータに対して最尤推定している．データのサンプル数は 100 とした．やはり，形状母数 ξ が大きくなるにつれて順序統計量のばらつきが右裾の部分で大きくなり，その結果 SLSC がばらつくことがわかる．形状母数の真値 ξ^* は一般に未知であり，推定された母数 $\hat{\xi}$ が ξ^* と一致する保証はないため，形状母数を自由母数としたモデルに対して SLSC を検定統計量とした適合度の統計的仮説検定を導入することは困難となる．

3 母数対数正規分布モデルの c や GEV 分布モデルの ξ に固定母数を与えたモデルを考え，その他の母数を推定すれば，なお SLSC を検定統計量とした適合度の統計的仮説検定を導入することは可能となる．これも 1 つの方策として考えられる．ただし，本来母数空間に制約を加えなければよりよいモデルとなる可能性があるにもかかわらず，その可能性を捨てることになる．

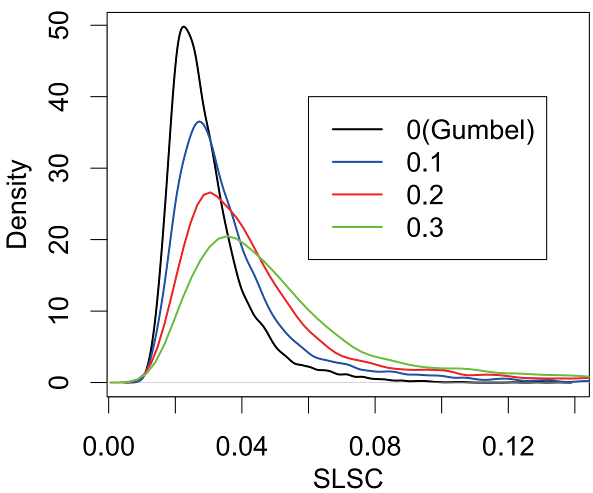


図-4 GEV 分布の場合の SLSC の確率密度関数．形状母数 $\xi = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ を固定し，位置母数，尺度母数は最尤推定した．サンプル数は 100 とした．

4. 適合度の統計的仮説検定における諸問題

これまでに，SLSC による適合度評価への統計的仮説検定の導入を試みた．しかしながら，3 母数型モデルに対しては全ての母数を推定して適合度を検定することは困難であることがわかった．ここでは，適合度の統計的仮説検定における諸問題について今後の展望を含めて考察する．

(1) 有意水準設定の主観性と第二種の過誤

想定するモデルが真の分布と一致することを，サンプルデータを以て直接証明することは不可能に近い．そこで適合度の統計的仮説検定では，候補に挙げられるモデル群をそれぞれ真の分布であると想定したとき，観測されたサンプルデータがそのモデルから発生することがめったに起こり得ないと考えられるモデルを候補モデル群からふるい落とし，残ったモデルを妥当なモデルであると考える．しかし，この「めったに起こり得ない」という確率，すなわち有意水準の設定には主観が伴う．有意水準の値を小さくすれば，第一種の過誤（真の分布と同じモデルを想定しているのに候補から外してしまう誤り）を起こす確率は低くなるが，第二種の過誤（真の分布とは異なるモデルを想定したのに，そのモデルを候補から外すことができない誤り）を起こす確率が大きくなってしまう．有意水準の設定はモデル選択においてクリティカルな問題であるにもかかわらず，その値は 0.1，0.05，0.01 といった慣例的な値が用いられることが多い．これは第二種の過誤を起こす確率を推定することが一般に困難であることによる．

(2) 水文頻度解析モデルの利用目的との不整合性

確率分布モデルの適合度の統計的仮説検定では,「モデルが真の分布であるか」を問題としている．これをモデル選択に導入することは，真の分布が最も良いモデルであることを暗黙のうちに了解している．しかし，水文頻度解析における「良いモデル」とは，その利用目的を考えれば,「確率水文量に対する推定が良いモデル」であり，それを実現する確率分布モデルが必ずしも真の分布であるとはいい切れない．

たとえば，位置母数 0，尺度母数 1，形状母数 0.01 の GEV 分布（真の分布）からサンプルデータを発生させる．このデータに対し，母数推定された Gumbel 分布モデルと GEV 分布モデルで，T 年確率水文量をそれぞれ推定する．モデルの母数はサンプルデータによって異なるため，T 年確率水文量の推定値は確率変数である．いま，この確率変数を Z で，また真の T 年確率水文量を z^* で表すことにすると，平均二乗誤差 $E[(Z-z^*)^2]$ が小さいほうがモデルとして良い．これを

$$
\begin{aligned}
E[(Z-z^*)^2] &= E[\{(E[Z]-z^*)+(Z-E[Z])\}^2] \\
&= \{Bias[Z]\}^2 + Var[Z] \qquad (6)
\end{aligned}
$$

に分解して，真の分布である GEV 分布モデルとそうでない Gumbel 分布モデルによる成績を比較したものが**表-2** である．ここでは $T=100$ として超過確率 0.01 に対応する確率水文量を考えた．真の分布である GEV 分布のほうが正確さが高く，$\{Bias[Z]\}^2$ が小さいが，安定性が Gumbel 分布に比べて低いために $Var[Z]$ が大きくなり，結果として真の分布ではない Gumbel 分布のほうが平均二乗誤差が小さくなっている．

表-2 100 年確率水文量に対する推定の良さ．

モデル	$\{Bias[Z]\}^2$	$Var[Z]$	$E_X[(Z-z^*)^2]$
GEV	0.0009472	0.6372	0.6382
Gumbel	0.01386	0.1676	0.1815

そもそも水文頻度解析において用いる確率分布はあくまでモデルであり，真の分布とはなり得ないことに注意しなければならない．数学的には，用いる水文極値データは独立性であること，また同一分布に従うことが要求されるが，実際にそうである保証はなく，また真の分布がある確率分布モデルで表現できる保証もない．そのため，あくまでも真の分布をもっともらしく表現するモデルとして考えるべきであろう．水文頻度解析に統計的仮説検定を導入する際には，モデルの適合度を「真の分布か否か」で判断していることに注意する必要がある．

5. おわりに

本研究では，SLSC の値が 0.03 や 0.04 といった，ある定められた基準値を超えるか否かで適合度を判定する現行の手法では，適合度が統一的に評価されていないことをシミュレーションによって明らかにした．そして，実際にどのような SLSC の基準値で適合度を評価すればよいかを明らかにするために，適合度の統計的仮説検定の導入を試みた．その結果，下記の事実が明らかとなった．

1) 検定統計量としての SLSC の確率分布はデータのサンプル数だけでなく，母数の与え方によって，また確率分布モデルによっても異なる．
2) 2 母数型のモデルに対しては一般的な数表を作成することが可能であり，それを**表-1** に示した．
3) 3 母数型のモデルに対しては，形状母数を固定するならば，2 母数型のモデルと同様の取り扱いが可能であるが，全ての母数を推定する場合には一般に適用が困難となる．

現在は，適合度の統計的仮説検定だけでなく，情報量規準による水文頻度解析に関する考察を進めている．

参考文献

1) 宝馨, 高棹琢馬: 水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準, 土木学会論文集, No.393/II–9, pp.151–160, 1988.
2) 葛葉泰久: 治水計画策定における統計的手法—SLSC 及び費用便益分析に関する考察—, 土木学会論文集 B, Vol.66, No.1, pp.66–75, 2010.
3) 田中茂信, 宝馨: 河川流量の頻度解析における適合度と安定性の評価, 水工学論文集, Vol.43, pp.127–132, 1999.

（**2011.9.30** 受付）