# 流出系の同定と予測

高 棹 琢 馬

本文は，流出系の同定と予測について，個々の手法よりはむしろ，その考え方，philosophy について説明しようとするものである。

まず，1で，用語や分類法に混乱のみられる流出モデルの分類を明確にしておく。用語法や分類それ自体を目的とするのではなく，流出系の同定と予測を議論する枠組みを設定するためである。

2では，流出モデル同定の概略を述べ，同定にあたって特に注意すべき事項を述べる。

3では，流出予測，特に実時間の予測の考え方を述べる。

各流出モデルの具体的な表現やその解法，パラメタ最適化の方法，確率微分方程式の解法等については，本文末の文献を参照されたい。

## 1. 流出モデルの分類

流出システムの同定と予測は流出システムのモデルを介してなされるものであるから，その方法論の展開に先立ち，流出モデルを分類・整理しておく必要がある。

流出モデルの分類については既に多くの水文学者が議論しているが，モデルの表現形式上の分類と内容上の分類との混乱がみられ，用語の不統一と議論の不徹底を招いている。

### 1.1 流出モデルの表現形式上の分類

流出モデルは，変数，パラメタ，ノイズと，変数の動的推移を表現する数式で記述される。

ここに，変数とは，たとえば，降雨強度，流出量，地下水位など，時刻によって変化し，入力である降雨強度の変動に対応して変化すると考えられる量である。このうち，降雨強度のようにシステムへの外的起因で観測される変数を入力変数，流出量のようにシステムの作用結果を表す変数を出力変数，地下水位のようにシステムの過去の履歴を表す変数を状態変数という。入出力の観測誤差やモデル誤差などを含め，その確率分布を与えなければならない外的起因をノイズという。入力変数，ノイズの変動の影響を受けないシステム固有の確定量（必ずしも時間的に不変でなくてもよい）をパラメタという。

以上の用語を用いると，流出モデルはその表現形式上次のように分類できる。

(i) 確率過程的モデルと決定

(ii) 応答モデルと状態空間モデル

(iii) 時間不変モデルと時間変化モデル

(iv) 集中モデルと分布モデル

以下，これらの分類の基準を述べる。

(i) 確率過程的モデルと決定論的モデル

確率過程的モデルとは，モデル中にノイズを含む項を陽に含んでいるモデルをいう。そうでないモデルを決定論的モデルという。言いかえると，任意に固定した時刻までのシステムの履歴を与えると，その時刻以後，確定入力に対して確定出力が得られるモデルが決定論的モデル，出力が確定せず確率的に与えられるモデルが確率過程的モデルである。ここで，確率過程的，決定論的という形容はモデルの変換特性に対するものであり，モデル同定の方法や利用法に対するものではないことに注意されたい。

(ii) 応答モデルと状態空間モデル

モデル中に状態変数を含むモデルを状態空間モデル，そうでないモデルを応答モデルという。これは表現形式上の問題であって，場合によっては容易にその表現形式を変換できることもある。

(iii) 時間不変モデルと時間変化モデル

パラメタおよびノイズの統計的性質が時間的に不変であるとするモデルが時間不変モデル，これらが時間的に変化するとするモデルが時間変化モデルである。ただし，パラメタが時間的に変化するといっても，それは各時刻に対して確定したもので，かつ入力変数やノイズの変動の影響をうけないものとする。

(iv) 集中モデルと分布モデル

モデルを記述する独立変数として時刻のほかに空間座標を含むモデルが分布モデルであり，kinematic waveモデルがその例である。これに対して，モデルを記述する独立変数が時刻だけのモデルが集中モデルであり，貯留関数モデルがその例である。分布モデルでも，kinematic waveモデルのように連続的空間座標を考えるものと，離散的空間座標を考えるものがある。連続的空間座標をもつモデルを，離散的空間座標をもつモデルや集中モデルに変換することを集中化（lumping）という。逆に，集中モデルを空間的に配置，連結して変数やパラメタの空間的分布を考えることもある。

以上の分類を具体的に説明するために，いくつかのモデルを例示しよう。

例(i) 時刻 $t-1$ から時刻 $t$ までの降雨量を $r_t$，時刻 $t$ の流出量を $Q_t$ とするとき，

$$Q_t = c_0^{(0)} + \sum_j c_j^{(1)} r_{t-j} + \sum_{i,j} c_{ij}^{(2)} r_{t-i}\, r_{t-j} + \cdots \tag{1}$$

とする。ただし，$c_0^{(0)}$，$c_j^{(1)}$，$c_{ij}^{(2)}$，… は時間的に不変のパラメタであるとする。これは，Voltera級数展開の離散形であり，非線形で決定論的な時間不変の応答モデルで，しかも集中モデルである。

右辺第2項で打ち切るとモデルは線形になる。$c_0^{(0)}$, $c_j^{(1)}$, $c_{ij}^{(2)}$, … が時刻の関数であれば，時間変化モデルになる。(1)式右辺に，誤差項 $\varepsilon_t$ を明示して，

$$Q_t = c_0^{(0)} + \sum_j c_j^{(1)} r_{t-j} + \Sigma c_{ij}^{(2)} r_{t-i}\ r_{t-j} + \cdots + \varepsilon_t \tag{2}$$

とし，$\varepsilon_t$ の確率モデルを与えると，確率過程的モデルになる。

例(ii) 時刻 $t$ の降雨強度を $r(t)$，時刻 $k$ での流出量を $Q_k$ とするとき，

$$\left.\begin{aligned} &\partial h/\partial t + \partial q/\partial x = r(t) + v(t), \qquad 0 \leq x \leq 1 \\ &x = 0 \text{ で } q = h = 0, \qquad q = \alpha h^m \\ &Q_k = q \Big|_{\substack{x=1\\t=k}} + w_k \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

とするモデル。ただし，$h$, $q$ は流積と流量を表す従属変数，$x$ は無次元化された空間座標，$\alpha$, $m$ は時間的に不変のパラメタ，$v(t)$, $w_k$ はその確率モデルが与えられるノイズである。これは，確率過程的 kinematic wave モデルである。$m > 1$ のとき非線形で，$m = 1$ のとき線形である。また，これは $h$ を状態量とする状態空間型の分布モデルである。$v(t)$, $w_k$ がなければ，決定論的モデルである。(3)式を局所的に積分して，多段貯水池系

$$\left.\begin{aligned} &dh_i/dt = f_i\big(r(t) + v(t)\big) + q_{i-1} - q_i, \quad q_i = \alpha_i h_i^m, \quad i = 1, \cdots, N \\ &q_0 = 0 \\ &Q_k = q_N \big|_{t=k} + w_k \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

の形に変換すると集中化モデルが得られる。ただし，$N$, $f_i$, $\alpha_i$ は集中化に際して決定される時間不変のパラメタである。

## 1.2 流出モデルの内容上の分類

流出モデルの内容上の最も基本的な分類は，black box モデル，grey－white モデルである。ここに，black box モデルとは，入出力変換の内部機構を無視して，入出力の変換規則を入出力資料のみから決定しようとする応答モデルである。応答モデルでも，その応答関係が入出力の内部機構から演えき的に導かれるものは black box モデルとは言わない。これに対して，入出力変換の内部機構を考慮するモデルは，grey－white モデルという。入出力の内部機構を記述するには，入出力変数以外の変数が必要となるのが普通であって，結果的に grey－white モデルは状態空間モデルの形式をとる。white モデルとはシステムの内部機構を忠実に記述するモデルのことであるが，流出現象のような複雑な自然現象では white モデルの実現は困難である。

流出システムの内部機構を考える grey－white モデルは，物理的モデル（physically－based model）とよばれる。物理的モデルでも，内部機構の考慮のレベルは様々であり，局所的な雨水流動の基礎方程式によるモデルを極とし（hydro－dynamic model），水文学的知識を交えた直観によってモデル

構造を措定する種々のモデルがある。後者を特に概念的モデルということがある。

## 2. 流出モデルの同定

流出モデル同定の手順を図1に示す。

降雨，流出量の観測，流出システムの内部構造に関する実験や観測，および水文学的知識にもとづいてモデル構造を決定する。モデル構造をどのようにするかはモデル化の目的にも依存する。モデル構造が決定されると，パラメタを決定する。物理的意義の明確なパラメタで流域条件から決定できるものもある。未知パラメタは，過去の降雨・流出量データを利用して決定することになる。パラメタが決定されると，パラメタ決定に利用したデータ，および検証のために別にとったデータに対して，ノイズの白色仮定等のモデルの仮説を検定するとともに，適合度を評価して，モデルの採否を決定する。

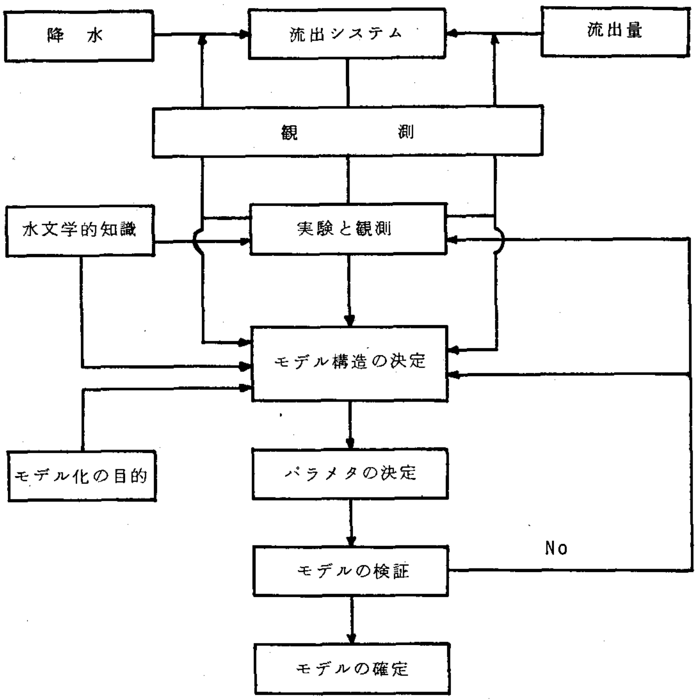


**図1　流出モデル同定の手順**
**（Mehra ＆ Lainiotis（1976）を基に作成）**

以下，本文ではモデル同定にあたって特に注意すべき事項を述べる。

### 2.1　モデル化の目的

流出モデルに対する次の要請は基本的である。

　ⅰ）流出現象をできるだけ忠実に表現すること。

　ⅱ）モデルの数式群の解法が容易であること。

この2つの要請は，流出システムモデル化の2つの基本的な目的である現象の理解と降雨の流量への変換に関連している。一般に，現象を正確に記述しようとすれば，局所的な雨水流動の表現式はたとえ簡明であっても，場の記述が複雑になって，総体としてモデルの数式群の解法も難しくなるので，この2つの要請を両立させるのは容易でない。流出現象をよりよく理解するために，現象を忠実に説明するモデルの構成を第一義として，モデルの解法に電子計算機を用いる場合に，必要とする記憶容

量や計算時間が大きくても，解けさえすればよいとすることもあるが，モデルを応用するという立場からすれば，解法の容易さという要請は無視できない。

実際には，長期流出を対象とするか，短期の洪水流出を対象とするか，流域特性の変化を問題にするのかといった具体的なモデル化の目的に対応して，流出現象の中でもそれに関連した要素を重視した簡略化を考えていかざるを得ない。数多くの流出モデルが開発されているのは，こうしたモデル化の目的の多様性にもその一因がある。ただし，モデル化の目的に対応した簡略化や近似といっても，現象の観測や理解を基礎とする必要があることを注意しておく。

## 2.2 入出力の形態と観測誤差

流出モデル同定にあたって，(i)現実の流出システムの入出力の形態，(ii)その観測値の形態，(iii)モデルの入出力の形態の相異に注意しておくことが必要である。

現実の流出システムでは，入力である降雨は時間的，空間的に変動し，出力である流量は時間的に変動する。これらの入出力の変動は連続的であるが，降雨は流域内の幾つかの地点で，ある時間間隔内の累加値が観測され，流量は対象地点である時間間隔ごとの瞬時値が観測されるのが普通である。また，モデルでは，モデル化の目的によって，入出力の時間的・空間的変動の取扱い方は様々である。たとえば，連続時間で動作するモデルでは，降雨入力は連続時間で扱うことになるし，離散時間で動作するモデルでは降雨は離散時間で扱う。

モデルの入出力の形態は，モデル化の目的に適合するように選択することが必要であるが，特に実流域の入出力観測資料にもとづいて，その入出力応答を説明したり，未知パラメタを同定したりする場合には，観測された入出力値は現実のそれの一部であり，しかも観測の誤差があること，また，モデルの入出力に適合するように変換した場合はその影響があることを十分念頭におかねばならない。

これらの入出力形態の不一致による誤差の存在を無視して，入出力の対応を決定論的に扱うと不合理な結果を生じる。たとえば，前章(1)式で記述するモデルでは，過去の入出力データからパラメタを決定しようとしても，パラメタを未知数とする方程式は不能となるであろう。誤差項を付加して前章(2)式のモデルの形で考えれば，この不合理は回避される。

## 2.3 モデル構造の決定

形式的に言えば，流出システムモデルを同定することは，全ての可能な流出システムモデルの集合$\Omega$の中で，特定の流域の流出システムに何らかの意味で近いと考えられる要素$\varphi$を決定することである。実際には，$\Omega$を考えることは不可能であって，不定のパラメタ$\boldsymbol{\theta}$を含む$\Omega$のある部分集合$\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi(\boldsymbol{\theta}):\boldsymbol{\theta}\varepsilon L\}$を設定し，特定の流出システムに近くなるように$\boldsymbol{\theta}$を決定する。ただし，$L$はパラメタ$\boldsymbol{\theta}$のとりうる空間である。この部分集合$\boldsymbol{\Phi}$を特徴づける性質をモデル構造という。

モデル構造をどのようにして決定するかは，流出システムのモデル同定のkey pointである。モデ

ル構造の決定へのアプローチは，できるだけ広範囲の入出力系を表現できるように自由度の大きい構造にする方法と，逆に，流出現象固有の特性をできるだけ組込んだ限定された構造にする方法とを対極として整理することができる。

前者の方法は，Black box モデルを特徴づける。その古典的なものは単位図法であり，因果性と入出力応答の線形性と定常性を仮定するだけである。線形性の仮定をとり除いたものとしては，Voltera 級数展開によるモデルがある。このアプローチでのモデル同定では，モデル構造の決定よりも入出力データに適合するようにパラメタを同定することに重点がおかれる。

後者の方法は，Grey−White box モデルを特徴づける。もちろん，タンクモデルのように，ある程度流出現象に関する知識に立脚しているとはいえ，雨水流動の力学的把握から遠いものもあるが，一般には，流出システムの内部構造に関する実験と観測，水理学的・水文学的知識をもとに，モデル構造が決定される。Black box モデルとは対照的に，パラメタ同定よりもモデル構造決定に重点がおかれる。

### 2.4 パラメタの推定とモデルの検証

モデルの未知パラメタは，対象とする流域の降雨・流量データを用いて推定する。パラメタ推定とモデルの検証の方法は，決定論的モデルと確率過程的モデルで異なる。

まず，決定論的モデルを考える。簡単のため離散時刻で考え，時刻 $t-1$ から時刻 $t$ までの降雨量を $r_t$，時刻 $t$ の流出量を $Q_t$ とするとき，降雨量系列 $r_t$，$r_{t-1}$，…，流出量系列 $Q_{t-1}$，$Q_{t-2}$，… と未知パラメタ $\boldsymbol{\theta}$ を用いて $Q_t$ が求められるモデル

$$Q_t = f(\boldsymbol{\theta};\, r_t,\ r_{t-1},\ \cdots;\ Q_{t-1},\ Q_{t-2},\ \cdots) \tag{1}$$

を考える。降雨量系列，流量量系列に観測データを代入すれば，(1)式の系列は未知パラメタ $\boldsymbol{\theta}$ に関する方程式系になるが，実際には誤差があるから，この $\boldsymbol{\theta}$ に関する方程式は不能になるものと考えなければならない。すなわち，表現上，決定論的モデルといっても，実質上は，ノイズ $\varepsilon_t$ を考えて，(1)式のかわりに

$$Q_t = f(\boldsymbol{\theta};\, r_t,\ r_{t-1},\ \cdots;\ Q_{t-1},\ Q_{t-2},\ \cdots) + \varepsilon_t \tag{2}$$

を考えざるを得ない。未知パラメタ $\boldsymbol{\theta}$ を推定するのによく用いられる方法は，パラメタ $\boldsymbol{\theta}$ に対して，(2)式より算定される残差 $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$ の平方和を最小

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_t \{\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})\}^2 \longrightarrow \min \tag{3}$$

にするように $\boldsymbol{\theta}$ を決定するというものである（最小2乗法）。モデルが誤差を含まなければ，$J(\boldsymbol{\theta})=0$ となる $\boldsymbol{\theta}$ を求めることができるはずであるから，(3)式のように $\boldsymbol{\theta}$ を決めることは直観的には首肯できる。最小2乗法は，$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$ が $\boldsymbol{\theta}$ に関して線形であるとき特に簡単で，(3)式の極値条件から $\boldsymbol{\theta}$ に関する連立1次方程式が得られる。これを解くのは容易である。$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$ が $\boldsymbol{\theta}$ に関して線形でない場合は問

題が複雑になるが，最近では強力な非線形最小２乗法の計算機プログラムが用意されている。

(3)式の基準は，$\varepsilon_t$ が分散一定の正規白色ノイズであると仮定したとき，最尤推定法によっても導かれる。逆に言えば，$\varepsilon_t$ が分散一定の正規白色ノイズでない場合には，(3)式の基準を採用する根拠は薄れる。たとえば，$\varepsilon_t$ は $f(\boldsymbol{\theta}; r_t, r_{t-1}, \cdots; Q_{t-1}, Q_{t-2}, \cdots)$ や $Q_t$ が大きいときほど大きいと考えられることもある。その場合，$f(\boldsymbol{\theta}; r_t, \cdots; Q_{t-1}, \cdots)$ や $Q_t$ に指数変換や対数変換を施した後で，(3)式を適用したり，評価式 $J(\boldsymbol{\theta})$ を別の評価式，たとえば

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_t \left| \varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) / Q_t \right|$$

に変更したりすることが一般に採用されているようである。いずれにしても，$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$ が $\boldsymbol{\theta}$ に関して線形で，(3)式から $\boldsymbol{\theta}$ を求める場合を除いて，$\boldsymbol{\theta}$ を求める問題は非線形最適化問題になる。非線形最適化手法は種々提案されており，その計算機プログラムも完備されつつある。どのような最適化手法を用いるにせよ，局所的解と大域的解との相異，パラメタ間の従属性等に注意する必要がある。

最適パラメタ値を用いたときの評価値 $J(\boldsymbol{\theta})$ がある基準値を満たせば，一応そのパラメタ値が採用される。しかし，パラメタ値の妥当性を適合度の評価値 $J(\boldsymbol{\theta})$ だけから判断するのは不適切である。というのは，一般に，パラメタの個数が多いほど，適合度の評価値はよくなるが，逆に，データへの依存度が増大して，パラメタの安定性が失われるという問題があるからである。決定論的モデルの未知パラメタの推定に際して，この問題を扱いうる理論は無いが，実際的な方法としては，求められた最適パラメタ値を用いて，別にとっておいた降雨流量データの再現計算をし，その適合度の評価値を求めることが考えられる。

次に，確率過程的モデルのパラメタ推定を考える。最初に，(2)式の形の確率過程的モデルで，$\varepsilon_t$ が定常で白色である場合を考えよう。$\varepsilon_t$ が定常で白色であれば，残差系列の尤度関数が求められるから，最尤推定法を適用して未知パラメタを推定することができる。特に $\varepsilon_t$ が正規分布にしたがえば，最尤推定法は(3)式の最小２乗法に帰着する。最尤推定法によって，ノイズの確率分布のパラメタを含めモデルのパラメタが得られれば，これを用いて算定される残差系列に対して，ノイズの確率分布形や白色性等の仮説を検定することになる。すなわち，(2)式の形でも，$\varepsilon_t$ を単に誤差としてその確率分布特性をあまり考えない場合と，$\varepsilon_t$ に対してある確率モデルを考えて確率論的枠組みの中で考える場合とでは，パラメタ推定の方法やモデルの検定の方法も異なってくるのである。

確率過程的モデルといっても，(2)式では，ある時刻の流出流量が，その時刻以前の情報から決定論的に求められる部分とノイズを表す部分の和で表されている。より一般的な確率過程的モデルでは，前者の決定論的な部分は，流出システムの状態量の関数におきかえられ，しかも，その状態量が推定されるべき確率変数である。この一般的な場合には，残差 $\varepsilon_t$ を直接算定することはできない。しかしながら，次章で述べるように，$\varepsilon_t$ そのもののかわりに予測残差（次章参照）を用いることができる。

確率過程的モデルの場合には，パラメタの個数と安定性の問題に対する理論としてＡＩＣがある。

とは言え，確率過程的モデルの場合でも，求められたパラメタ値を，別にとっておいた降雨流量データに適用して，その適合度を検定した方がよいと思われる。

一般に，モデルの同定は，ある与えられた降雨入力に対して，出力である流出流量を算定することを目的としてなされるものであるから，その算定誤差の程度，できればその確率分布を与えるものである方が望ましい。こうした意味で，従来決定論的モデルとして扱われたモデルでも，観測誤差やモデル誤差を表すノイズ項を陽に導入して，その確率分布形や分布のパラメタをも考えていく方向をとっていくことが望まれる。

なお，詳しい議論は省略するが，降雨流量系列の統計的性質，たとえば，その定常性や白色性を仮定し，それを利用したBlack box モデルの応答核の同定が考えられることがあるが，このような仮定が成立するかどうかを検定しておく必要があることは言うまでもない。

## 3. 流出システムの実時間予測

流出予測には，水工施設の計画や管理と関連して2つの型が考えられる。1つは，計画予知（Design forecast）であって，これは施設の機能，配置，および規模決定といったハードな対策の基本となるものである。計画予知では，過去の降雨系列特性をさまざまな確率・統計的角度から分析して，降雨系列を多数発生させ，流出モデルを介して流量系列に変換し，その確率・統計的性質を検討するという方法が有効である。

もう1つの型は，管理のための予知（Operational forecast）であって，施設の実時間での管理，運用といったソフトな対策の基本となるものである。この場合は，降雨・流出量が時々刻々観測されるのが普通であって，これらの観測情報を利用して，予測を逐次修正していくことが重要である。

この型の予測は現実に現象が進行しているときに行われるという意味で，実時間（real－time）予測，情報が時々刻々入手されるという意味でon－line 予測，その方法が逐次的であるという意味で，逐次（sequential）予測ともよばれる。本文では，この型の流出予測を考える。

流量の予測誤差がパラメタの推定誤差に起因すると考えて，観測流量を利用してパラメタをBayes論的に推定していくのは，流出予測の有力な考え方である。この考え方を更に発展させて，パラメタに関して線形の応答モデルで，ランダムウォークモデルにしたがってパラメタが確率過程的に変動すると考え，Kalman 理論によってそのパラメタを逐次誰定していく手法もある。パラメタの本来の意義からすると不合理なこの扱いは，流出現象の進行に伴う入出力応答関係の変化に追随するために考えられた処置である。

しかしながら，流出システムは非線形システムであり，その入出力応答関係は入力の大きさに依存して変化することに注意すると，入力の変化が緩やかである場合を除いて，応答モデルのパラメタを逐次変化させる方法による流出予測には問題があり，流出現象の変化過程それ自体をモデル化した物

理的モデルによる流出予測を考えるべきであろう。

以下，本章では，従来決定論的に取扱われることの多かった物理的モデルに観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱を導入して確率過程的状態空間モデルとし，これを用いる流出予測手法を解説する。

## 3.1 離散時間線形システムの予測

本節では，最も単純な離散時間線形システムの予測理論を解説する。

### 3.1.1 システムの記述

ある動的システムについて，時刻 $t_k$（$k=0, 1, \cdots,\quad t_0<t_1<\cdots$）以後の動的挙動を決定するのに十分な過去の履歴を表す量，すなわち状態量がn次列ベクトル $\boldsymbol{x}(t_k)$（状態ベクトルという）で表されるとして，その動的推移が，状態方程式

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1})=\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\ t_k)\,\boldsymbol{x}(t_k)+\boldsymbol{b}_k+\boldsymbol{v}_k,\quad k=0, 1, \cdots \tag{1}$$

によって記述され，出力方程式

$$\boldsymbol{y}(t_{k+1})=H(t_{k+1})\,\boldsymbol{x}(t_{k+1})+\boldsymbol{c}_{k+1}+\boldsymbol{w}_{k+1},\quad k=0, 1, \cdots \tag{2}$$

によって時刻 $t_{k+1}$ にm次元列ベクトルの出力 $\boldsymbol{y}(t_{k+1})$ を発生するものとする。$\boldsymbol{y}(t_{k+1})$ は $\boldsymbol{h}(t_{k+1})$ を観測しているともみなせるので，(2)式を観測方程式ともいう。

ただし，$\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\ t_k)$，$H(t_{k+1})$ はその値が既知のn×n行列，m×n行列，$\boldsymbol{b}_k$，$\boldsymbol{c}_{k+1}$ はその値が既知のn次列ベクトル，m次列ベクトルである。

また，$\boldsymbol{x}(t_0)$，$\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{v}_1, \cdots$，$\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2, \cdots$ は互いに独立なn次，n次，m次の確率ベクトルで

$$\boldsymbol{x}(t_0)\sim N(\bar{\boldsymbol{x}}_0,\ P_0),\quad \boldsymbol{v}_k\sim N(0,\ V_k),\quad \boldsymbol{w}_{k+1}\sim N(0,\ W_{k+1}) \tag{3}$$

とする。ここに，$N$は正規分布を表し，たとえば，$N(\bar{\boldsymbol{x}}_0,\ P_0)$ は平均値 $\bar{\boldsymbol{x}}_0$，共分散行列 $P_0$ をもつ正規分布を表す。$\boldsymbol{v}_k$，$\boldsymbol{w}_{k+1}$ はノイズである。

(1)，(2)式で記述されるような動的システムを離散時間線形システムという。

### 3.1.2 フィルタリング・予測の定義

前項の(1)，(2)式で記述されるシステムに対して，時刻 $t_k$ までの出力値の系列を $Y(t_k)$ とする。すなわち，

$$Y(t_k)=\{\boldsymbol{y}(t_1), \cdots,\ \boldsymbol{y}(t_k)\} \tag{4}$$

とおく。時刻 $t_k$ に，情報 $Y(t_k)$ が得られているときに，将来時刻 $t_j$ での状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t_j)$，出力値 $\boldsymbol{y}(t_j)$ の条件つき確率分布を求めることを予測という。また，時刻 $t_k$ で，情報 $Y(t_k)$ が得られているときに，時刻 $t_k$ の状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t_k)$ の条件つき確率分布を求めることをフィルタリングという。(1)～(3)式で記述される動的システムでは，これらの条件つき確率分布は全て正規分布になるので，その条件つき期待値・共分散行列を求めることと，対応するフィルタリング・予測とは同等である。

### 3.1.3 予　測

$Y(t_k)$ が得られているときの $\boldsymbol{x}(t_j)$ の条件つき期待値，共分散行列を，$\hat{\boldsymbol{x}}(t_j|t_k)$，$P(t_j|t_k)$ と表す。また，このときの $\boldsymbol{y}(t_k)$ の条件つき期待値，共分散行列を，$\hat{\boldsymbol{y}}(t_j|t_k)$，$Q(t_j|t_k)$ と表すことにしよう。そうすると，(3)式により

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_0|t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0, \qquad P(t_0|t_0) = P_0 \tag{5}$$

である。

いま，ある時刻 $t_k$ で $\hat{\boldsymbol{x}}(t_k|t_k)$，$P(t_k|t_k)$ が得られているとする。(1)式から，直ちに

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(t_{k+1}|t_k) &= \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\ t_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}(t_k|t_k) + \boldsymbol{b}_k \\ P(t_{k+1}|t_k) &= \boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\ t_k)\,P(t_k|t_k)\,\boldsymbol{\Phi}(t_{k+1},\ t_k)^T + V_k \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

が得られる。さらに，(1)式を繰り返し適用すると，$j=k+1$，$k+2$，… に対して，再帰式

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(t_{j+1}|t_k) &= \boldsymbol{\Phi}(t_{j+1},\ t_j)\,\hat{\boldsymbol{x}}(t_j|t_k) + \boldsymbol{b}_j \\ P(t_{j+1}|t_k) &= \boldsymbol{\Phi}(t_{j+1},\ t_j)\,P(t_j|t_k)\,\boldsymbol{\Phi}(t_{j+1},\ t_j)^T + V_j \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

を得る。これが状態ベクトルの予測式である。出力値の予測は，(2)式より，$j=k+1$，$k+2$，… に対して

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{y}}(t_j|t_k) &= H(t_j)\,\hat{\boldsymbol{x}}(t_j|t_k) + \boldsymbol{c}_j \\ Q(t_j|t_k) &= H(t_j)\,P(t_j|t_k)\,H(t_j)^T + W_j \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

として求められる。

### 3.1.4 フィルタリング

$\hat{\boldsymbol{x}}(t_{k+1}|t_k)$，$P(t_{k+1}|t_k)$ が得られており，時刻 $t_{k+1}$ に新しい出力値 $\boldsymbol{y}(t_{k+1})$ が入手されたとしよう。$\boldsymbol{x}(t_{k+1})$ の事前確率分布は $N\big(\hat{\boldsymbol{x}}(t_{k+1}|t_k),\ P(t_{k+1}|t_k)\big)$ であり，$\boldsymbol{x}(t_{k+1})$ が与えられたときの $\boldsymbol{y}(t_{k+1})$ の確率分布は $N\big(H(t_{k+1})\,\boldsymbol{x}(t_{k+1}),\ W_{k+1}\big)$ であるから，$\boldsymbol{y}(t_{k+1})$ が得られた後の $\boldsymbol{x}(t_{k+1})$ の事後確率分布はBayesの定理によって求められる。結果のみを記すと，事後確率分布は正規分布であり，

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t_{k+1}) = \boldsymbol{y}(t_{k+1}) - \hat{\boldsymbol{y}}(t_{k+1}|t_k) \tag{9}$$

$$K_{k+1} = P(t_{k+1}|t_k)\,H(t_{k+1})^T\,Q(t_{k+1}|t_k)^{-1} \tag{10}$$

とおいて，

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(t_{k+1}|t_{k+1}) &= \hat{\boldsymbol{x}}(t_{k+1}|t_k) + K_{k+1}\,\tilde{\boldsymbol{y}}(t_{k+1}) \\ P(t_{k+1}|t_{k+1}) &= P(t_{k+1}|t_k) - K_{k+1}\,H(t_{k+1})\,P(t_{k+1}|t_k) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

を得る。$K_{k+1}$ はKalman利得行列とよばれる。

以上により，時々刻々，出力値 $\boldsymbol{y}(t_k)$ が得られると，$\hat{\boldsymbol{x}}(t_k|t_{k-1})$，$P(t_k|t_{k-1})$ から，情報 $Y(t_{k-1})$ を直接用いることなく，$\hat{\boldsymbol{x}}(t_k|t_k)$，$P(t_k|t_k)$ が求められ（フィルタリング），$j=k+1$，… について $\hat{\boldsymbol{x}}(t_j|t_k)$，$P(t_j|t_k)$，$\hat{\boldsymbol{y}}(t_j|t_k)$，$Q(t_j|t_k)$ を求めることができる（予測）。

以上の定式化では，$\boldsymbol{x}(t_0)$，$\boldsymbol{v}_k$，$\boldsymbol{w}_{k+1}$ が正規分布にしたがうとしたが，これらの仮定を設けない

場合にも，条件つき期待値を条件つき線形最小2乗推定，条件つき共分散行列を推定誤差の共分散行列と読みかえると，上記のアルゴリズムはそのまま成立する。このKalmanのアルゴリズムの利点は，推定値（または期待値）だけでなく，推定誤差の共分散行列をも与えること，また，過去の情報の全てを用いるのではなく，ただその時刻の観測情報を処理するだけで過去の全ての情報を用いた推定になるように逐次式を構成している点にある。

なお，(9)式で定義される出力の予測残差 $\tilde{\boldsymbol{y}}(t_{k+1})$ は，平均値0，共分散行列 $Q(t_{k+1}|t_k)$ の白色系列になることが容易に示される。

## 3.2　流出システムのフィルタリングと予測

前節では，離散時間線形の動的システムのフィルタリング・予測理論を解説した。この理論は，確率的外乱を受けて状態が確率過程として推移する動的システムについて，時々刻々得られる観測値にもとづき状態量の条件つき確率分布を更新しつつ，将来の状態量，出力の条件つき確率分布を求めていくものであった。

流出システムでも，物理的モデルの多くは状態空間モデルと考えられるので，上記の理論を適用することが可能である。ただし，物理的モデルのほとんどは決定論的モデルである。実際には，観測誤差やモデル誤差があるから，これに対応すると考える確率的外乱を決定論的モデルに導入すると確率過程的な状態空間モデルになる。もちろん，導入した確率的外乱の確率モデルが新たに必要となる。これは，統計学における線形回帰式のあてはめの問題と似ている。残差2乗和を最小にするように係数を決定する線形回帰式の単なるあてはめでは，新たな独立変数に対して線形回帰式を適用したときの誤差については何も言えない。これに対して，誤差項の確率分布特性を仮定して線形回帰式を確率モデルと考えるならば，単なる線形回帰式のあてはめより多くの情報が得られるのである。

確率的外乱を導入して決定論的モデルを確率過程的モデルとしても，直ちに前節の議論が適用されるわけではない。流出システムの場合，降雨入力があり，一般には非線形で，状態量は連続時間で推移し，導入した確率的外乱が必ずしも白色ではないかも知れないといった問題がある。以下，本節ではこれらの問題への対策を含めて，状態空間法による流出予測手法を解説する。

なお，以下，条件つき期待値，条件つき共分散行列を単に期待値，共分散ということがある。

### 3.2.1　確率的外乱の導入

従来の物理的モデルのほとんどは，状態ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$ を適当に定義することにより，$\boldsymbol{x}$ の動的推移を表す状態方程式(12)と，流出量を $\boldsymbol{x}$ の関数として表す出力式(13)とで記述される。

$$d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ r) \tag{12}$$

$$Q=g(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

ただし，$r$ は降雨強度，$Q$ は流出流量，$\boldsymbol{f}$，$g$ は適当な次元の，一般には非線形の関数である。

簡単な例としてタンクモデルをとりあげよう。**図2**に示すように，各タンクの貯水高を上から順に

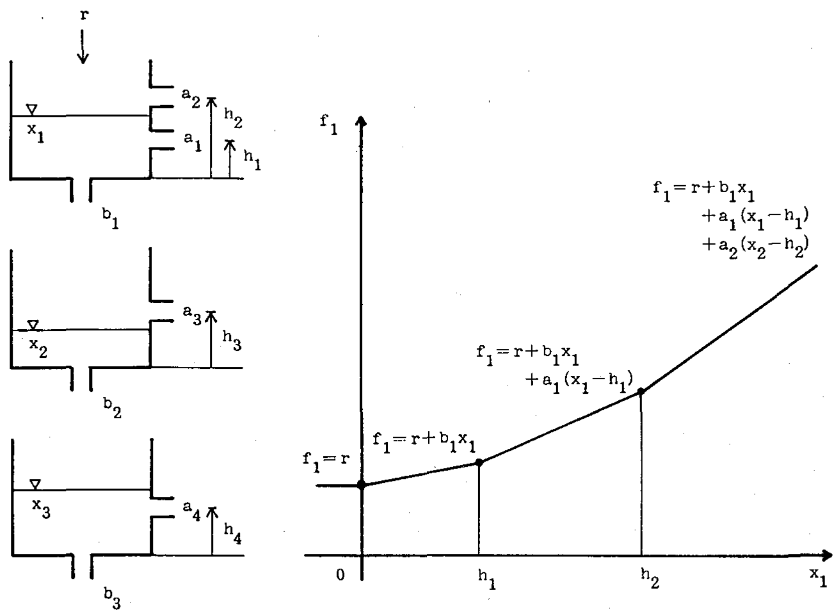


**図2　タンクモデル**

$x_1$, $x_2$, $x_3$ とし，流出高を $Q$ とすると，関数 $f_1$, $f_2$, $f_3$, $g$ を図2に示した流出孔の高さと係数を用いて適当に定義すると，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ r) \\ f_2\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ r) \\ f_3\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ r) \end{bmatrix}, \quad Q = g\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

を得る。たとえば，関数 $f_1$ は，図2に示すような折れ線関数になる。

実際には観測誤差やモデル誤差があるから，降雨強度 $r$ の観測値を代入しても，得られる計算流量 $Q$ は観測流量とは一致しない。そこで，これらの観測誤差やモデル誤差に対応すると考える確率的外乱項をモデルに付加することを考える。確率的外乱項をモデル中に明示することにより，観測値と計算値の乖離を流出予測に生かすことができるようになる。

確率的外乱の導入の様式は種々考えられるが，以下では，外乱項の有色性や状態量への従属性を比較的容易に組みこむことのできる方法を与える。

まず，時刻 $k-1$ から時刻 $k$ まで単位時間進む間を，連続時間で(12)式によって推移する部分と，時刻 $k$ に瞬間的に外乱項が付加される部分とに分解して考える。時刻 $k$ に外乱項を付加する直前の時刻を $k^-$ と表し，付加する外乱項を $\boldsymbol{v}\ (k)$ とかくと，上述の推移は

$$\left.\begin{array}{ll} k-1 \leq t < k \quad \text{で} & d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x},\ r) \\ t = k \quad \text{で} & \boldsymbol{x}\ (k) = \boldsymbol{x}\ (k^-) + \boldsymbol{v}\ (k) \end{array}\right\} \tag{14}$$

と表される。また，流出量は単位時間ごとに観測されるものとして，時刻 $k$ の観測流量を $y\ (k)$，観

測誤差を $w(k)$ とすると，

$$y(k) = g\big(\boldsymbol{x}(k)\big) + w(k) \tag{15}$$

と表される。

(14)，(15)式はより一般に，

$$\left.\begin{aligned} k-1 \leq t < k \quad &\text{で} \quad d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ r) \\ t=k \quad &\text{で} \quad \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{x}(k^-),\ \boldsymbol{v}(k)\big) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$y(k) = g\big(\boldsymbol{x}(k),\ w(k)\big) \tag{17}$$

と表される。ただし，$\boldsymbol{u}$，$g$ は適当に定義される関数である。

以後，(16)，(17)式中の確率的外乱 $\boldsymbol{v}(k)$，$w(k)$ は，状態ベクトルと独立で，相互に独立な白色正規系列であり，平均値は0，それぞれの共分散は既知と仮定する。そうすると，(16)，(17)式は流出システムの動的推移を確率的に記述するモデルとなる。このモデルが4.1で述べた離散時間線形システムと異なる点は，降雨入力があること，必ずしも線形でないこと，状態方程式が連続時間で定義されている部分をもっていることである。

### 3.2.2 降雨入力の処理

本項ではある概念操作によって，状態方程式(16)が，

$$\left.\begin{aligned} k-1 \leq t < k \quad &\text{で} \quad d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ t=k \quad &\text{で} \quad \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{x}(k^-),\ \boldsymbol{v}(k)\big) \end{aligned}\right\} \tag{16$'$}$$

の形に変形されることを示す。

まず，ある時間間隔ごとの累加値の形で降雨が観測されることを考えて，降雨強度 $r$ は各単位時間ごとに一定値をとるとする。そうすると，過去の降雨に対しては，(16)式の第1式右辺の $r$ は既知の一定値をとるので，$\boldsymbol{f}$ は状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ のみの関数とみてよい。

将来の降雨に対しては，状態ベクトル $\boldsymbol{x}$，関数 $\boldsymbol{f}$ を $n+1$ 次元に拡張して，

$$k-1 \leq t < k \quad \text{で} \quad x_{n+1} = r_k,\ f_{n+1} = 0 \tag{18}$$

とおくと(16)′式の第1式は(16)式の第1式の形になる。ただし，$r_k$ は時刻 $k-1$ から時刻 $k$ の降雨強度である。さらに，降雨強度 $r_{k+1}$ は，降雨予測者によって予測され，予測値 $\widehat{r}_{k+1}$ と予測誤差分散 $R_{k+1}$ が与えられるとし，外乱 $v(k)$，関数 $\boldsymbol{u}$ を $n+1$ 次元に拡張して，

$$v_{n+1}(k) = r_{k+1} - \widehat{r}_{k+1},\quad u_{n+1}\big(\boldsymbol{x}(k^-),\ \boldsymbol{v}(k)\big) = \widehat{r}_{k+1} + v_{n+1}(k) \tag{19}$$

とおき，降雨予測誤差 $v_{n+1}(k)$ の白色性を仮定すると，(16)式の第2式が得られる。

### 3.2.3 非線形性の処理

(16)′，(17)式中の関数 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{u}$，$g$ は一般には非線形の関数であり，**3.1** で考えた線形システムの理論を適用するには何らかの方法でこれらの非線形関数を線形化する必要がある。

線形化の1つの方法は，平均値回りにTaylor展開して1次の項までとることである。この方法では，たとえば $g(\boldsymbol{x})$ は

$$g(\boldsymbol{x}) \simeq \left[\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right] x + \left\{ g^{-}(\overline{\boldsymbol{x}}) - \left[\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right] \overline{\boldsymbol{x}} \right\} \tag{20}$$

と線形化される。ただし，〔$\partial g/\partial \boldsymbol{x}$〕は $\partial g/\partial x_j$ の $\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}$ での値を第 $j$ 成分とする行ベクトルである。

線形化のもう1つの方法は，

$$E\left[\left| g(\boldsymbol{x}) - \left\{ \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{x} + b \right\} \right|^2\right] \longrightarrow \min \tag{21}$$

となるように係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $b$ を定める方法である。$\boldsymbol{x}$ が正規確率分布にしたがい，$g(\boldsymbol{x})$ が，$\boldsymbol{x}$ の各成分の区分的な整多項式の和の形に表されれば，このような $\boldsymbol{a}$，$b$ は比較的容易に求められる。

### 3.2.4 状態ベクトルと流出量の予測

最初に状態ベクトルの予測を考える。3.1で述べたように，予測とは，現在時刻までの情報にもとづく将来時刻の確率変数の条件つき確率分布を求めることである。しかし，(16)′式中の関数 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{u}$ が非線形であるときには，状態ベクトルの条件つき確率分布の推移を厳密に求めることは困難であるので，状態ベクトルは近似的に正規分布にしたがうものと仮定し，関数 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{u}$ を局所的に線形化することによって，状態ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ の条件つき平均値 $\widehat{x}(t)$，条件つき共分散行列 $P(t)$ の推移を求めていくことにする。

状態ベクトルの推移を記述する(16)′式中の第2式は，右辺の関数 $\boldsymbol{u}$ を線形化して $\boldsymbol{x}(k^{-})$ と $\boldsymbol{v}(k)$ の線形式に変形すれば，4.1の(1)式と類似の形になるから，そこでの状態ベクトルの平均値，共分散行列の推移を求めることは容易である。

状態ベクトルの推移を記述する(16)′式中の第1式は微分方程式で表されている。この微分方程式を積分して，$\boldsymbol{x}(t)$ から $\boldsymbol{x}(t+\triangle t)$ への推移を

$$\boldsymbol{x}(t+\triangle t) = \boldsymbol{\Phi}(t+\triangle t,\ t)\ \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b} \tag{22}$$

の形に表せれば，3.1の(1)式と類似の形になる。ただし，$\triangle t$ は時間間隔である。(22)式の表現を得るには，$\boldsymbol{f}(x)$ を局所的に線形化して Euler の差分公式を適用するとよい。Pade近似と反復法を組み合わせれば，さらに高精度で(22)式の表現が得られる。

こうして状態ベクトルの平均値と共分散行列が求められれば，出力式(17)を線形化することにより，3.1の(8)式を得たのと同様にして出力の平均値と共分散が求められる。これが流出量の予測である。

### 3.2.5 状態ベクトルのフィルタリング

本項では，時刻 $k-1$ までの観測情報による状態ベクトル $\boldsymbol{x}(k-1)$（降雨強度を状態量に含めないn次元のもの）の，時刻 $k-1$ までの情報による平均値と，共分散行列が得られているとして議論を進める。

時刻 $k$ になると，時刻 $k-1$ から時刻 $k$ までの降雨強度の観測値 $r_k$ と，時刻 $k$ の流出量の観測値 $\boldsymbol{y}(k)$ が得られる。これらの情報を追加して，状態ベクトル $\boldsymbol{x}(k)$ の期待値，共分散行列を求める

（フィルタリング）。

追加された観測値のうち，まず，降雨強度の観測値 $r_k$ だけを先に用いる。すなわち，降雨強度を状態量に含めず既知として，前項の方法で，状態ベクトル $\boldsymbol{x}(k)$ の期待値，共分散行列 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(k)$，$\widetilde{P}(k)$ を求める。

次に，出力式(17)を $\boldsymbol{x}(k)$，$w(k)$ に関して線形化すると，**4.1** の(2)式と類似の形になるから，**4.1** の(9)〜(11)式で示されるKalman フィルターを用いて，観測流量 $y(k)$ を得た後の $\boldsymbol{x}(k)$ の期待値，共分散行列 $\widehat{\boldsymbol{x}}(k)$，$P(k)$ が求められる。

結局，流出予測の処理の流れは**図3**に示すようになる。これは，**図4**のように考えるとわかりやすい。同図上は時点 $k-1$ における流出予測のステップを，同図下は時点 $k$ における状態推定のステップを表しており，それぞれ，降雨・流量の観測と関連づけて図式的に示したものである。図の左から右へ時間 $t$ が進行し，棒グラフは時間ステップ内の平均降雨強度（実線部が既に観測された降雨，破線部が予測降雨）を示す。丸印は状態ベクトル（黒丸がフィルタリングによって得られた推定値，白丸が予測値）を表し，四角形は流量（黒四角が観測流量，白四角が予測流量）を表している。

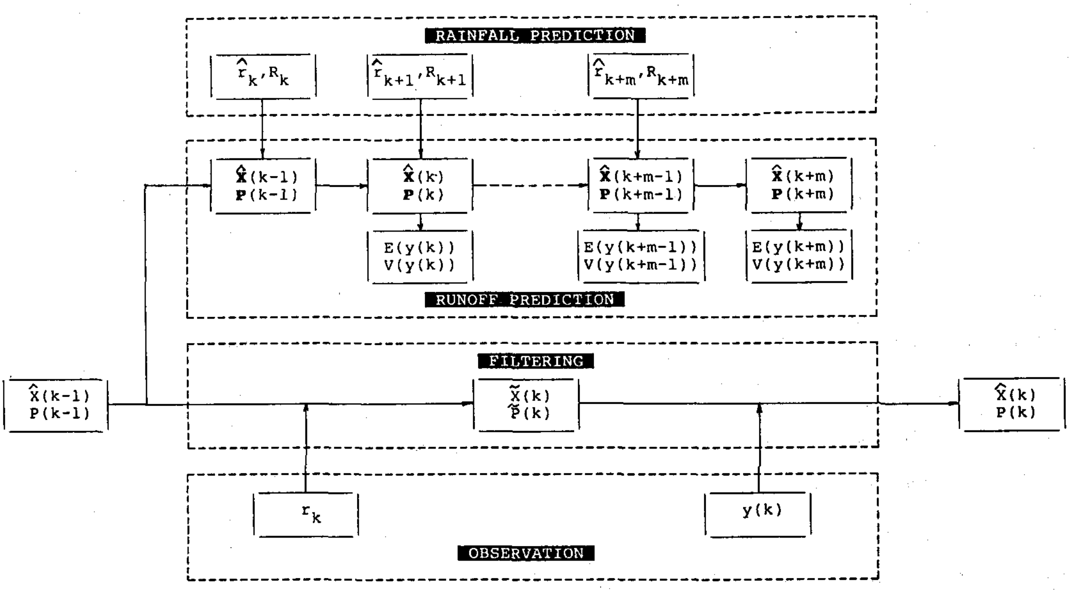


**図3　流出予測アルゴリズム**

さて，時点 $k-1$（**図4**上）において，状態の推定値 $\widehat{\boldsymbol{x}}(k-1)$ と共分散 $P(k-1)$ が求められていて，時点 $k-1$ から時点 $k$ までの降雨強度の予測値 $\widehat{r}_k$ と予測誤差分散 $R_k$ が与えられると，その予測降雨を用いて状態の推移を求めてゆき，得られた状態の予測値とその分散とから流出量 $y(k)$ の期待値 $\widehat{y}(k)$ と分散 $Q(k)$ を求める。このときの状態の推移を計算するには，まず，

$$
\begin{aligned}
&\widehat{x}_{n+1}(k-1)=\widehat{r}_k\,,\\
&P_{n+1,\,n+1}(k-1)=R_k\,,\\
&P_{i,\,n+1}(k-1)=P_{n+1,\,i}\,(k-1)=0\,,\\
&i=1\,,\ \cdots,\ n
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

とおいて次元拡大した状態ベクトル $\widehat{x}$ $(k-1)$ と共分散行列 $P(k-1)$ を設定し，これに対して **3.2.4** で述べた方法を用いる。もう１時間ステップ先の流出予測では，上で得られた状態の予測値とその分散を出発値とする。時点 $k$ から時点 $k+1$ の間の降雨の予測（$\widehat{r}_{k+1},\ R_{k+1}$）と，$k$ を $k+1$ におき直した(23)式により $\widehat{x}(k)$，$P(k)$ を再定義して $\widehat{y}(k+1)$，$Q(k+1)$ を同じ方法で求めることができる。以下同様にして必要とされる時間先までの流出量の予測を繰り返す。この図で，状態ベクトル（丸印），流量（四角形）の推移をそれぞれ破線で示してあるのは，予測降雨に基づいて求めたものであることを意味する。

次に，時点 $k$ になって（**図４** 下），時点 $k-1$ から時点 $k$ までの降雨強度 $r_k$ が観測値として得られると，時点 $k-1$ に得られていた状態の推定値 $\widehat{x}(k-1)$，$P(k-1)$ を出発値として，$r_k$ を用いて状態の推移を求め直し，$\widetilde{x}(k)$，$\widetilde{P}(k)$ を得る（ここでも **3.2.4** の解法によるが，入力降雨は確定値 $r_k$ を用いるので状態ベクトルの次元拡大は行わない）。時点 $k$ ではさらに流量の観測値 $y(k)$ を入手する。

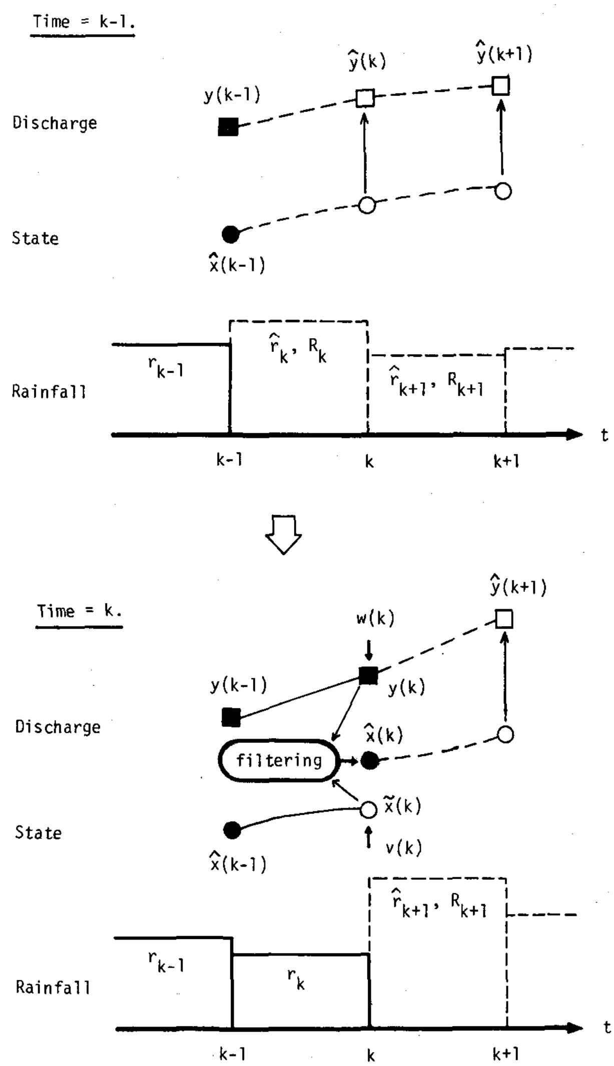


**図４　流出予測手順の説明**

これと $\widetilde{x}(k)$，$\widetilde{P}(k)$ とによってフィルタリングを実行し，状態ベクトルの新たな推定値 $\widehat{x}(k)$，$P(k)$ を求めるのである。この図の中で $v(k)$，$w(k)$ は，時点 $k$ において考慮すべき確率的外乱で

あって，$\boldsymbol{v}(k)$ はシステムノイズ（あるいはプラントノイズ），$w(k)$ は観測ノイズと呼ばれる。これらの意義は既に 3.2.1 で述べた。

### 3.2.6 モデルの検証と修正

3.1 で述べたように出力の予測残差は，平均値が 0 で，その分散の値もフィルタリング・予測計算の過程で得られる白色正規系列である。この性質を利用すると尤度関数が求められるから，確率的外乱の共分散行列やモデルパラメタ中に未知のものがあれば，それを最尤法によって同定することが考えられる。

また，上述した予測残差の性質はモデルの妥当性をチェックするのに利用できる。得られた予測残差の系列がこれらの性質に反する場合には，モデルの修正が必要である。

前項までの議論では，導入した確率的外乱は，状態ベクトルに独立で白色であると仮定したが，この仮定が成立しなければ，当然，予測残差の白色性が保証されない。予測残差のチェックによってモデルの修正が必要になった場合，確率的外乱に対するこの仮定の修正も考える必要がある。(16)，(17)式の表現を考えると，確率的外乱が状態ベクトルに関係する場合には，その関係を関数 $\boldsymbol{u}$，$g$ の中に含ませればよい。また，確率的外乱の有色性を考えるには，たとえば，1 次の自己回帰モデルを用いるとよい。$w(k)$ を例にとり，$\rho$ を自己回帰係数，$e(k)$ を白色正規系列として

$$w(k) = \rho w(k-1) + e(k)$$

とモデル化するとしよう。この場合，$w(k)$ を状態量に組み込み，$e(k)$ をあらためて $w(k)$ と考えるとよい。こうして，関数 $\boldsymbol{u}$，$g$ を修正し，状態量の次元を拡大することによって，前項までの議論の枠組みの中で，導入された確率的外乱の状態ベクトルへの依存性と有色性を実質的に考えることができる。

## 参　考　文　献

### 1. 流出モデル


金丸昭治・高棹琢馬：水文学，朝倉書店，1975.

木村俊晃：貯留関数法Ⅲ－1，土木技術資料，4，No.4，1962，pp.175－180.

菅原正己：流出解析法，共立出版，1972.

Jacoby，S. L. S.：A Mathematical Model for Nonlinear Hydrologic Systems，Jour. Geoph. Res.，Vol.71，No.20，1966.

Crawford，N. H. and Linsley，R. K.：The Synthesis of Continuous Streamflow Hydrographs and a Digital Conputer，Dept. of Civil Eng.，Stanford Univ.，1962.

池田三郎・椹木義一：GMDH（発見的自己組織化法）と複雑な系の同定と予測，計測と制御，

Vol.14, No.2, 1975, pp.185−195.
Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. : Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden−Day, 1970.

## 2. モデル同定

Clarke, R.T. : A Review of Some Mathematical Models Used in Hydrology, with Observations on Their Calibration and Use, Journal of Hydrology, Vol.19, 1973, pp.1−20.
Dawdy, D.R. and Lichty, R.W. : Methodology of Hydrologic Model Building, Symp. Use of Analogue and Digital Computers in Hydrology, 2, Tucson, Arizona, 1968, IASH, 81, pp.347−355
Chapman, T.G. : Optimization of a Rainfall−Runoff Model for an Arid−Zone Catchment, Results of Research on Representative and Experimental Basin, Symp. Wellington, 1970, IASH, 96, pp.126−144.
Mehra, R.K. and Lainiotis, D.G. (ed.) : System Identification, Advances and Case Studies, Academic Press, 1976.
Sorooshian, S. and Dracup, J.A. : Stochastic Parameter Estimation Procedures for Hydrologic Rainfall−Runoff Models, Correlated and Heteroscedastic Error Cases, Water Resource Research, Vol.16, No.2, 1980, pp.430−442.
関根智明（訳）：非線形最適化問題の反復解法，培風館，1976.

## 3. 予　測

日野幹雄：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，1974，pp.39−47.
Wood, E.F. (ed.) : Real−Time Forecasting/Control of Water Resource Systems, PERGAMON PRESS, 1976.
Chao−Lin Chiu (ed.) : Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources, Proc. AGU Chapman Conference, Pittsuburgh, Pennsylvania, U.S.A., 1978.
高棹琢馬・椎葉充晴：状態空間法による流出予測，京都大学防災研究所年報，第23号B−2，1980，pp.211−226.

Gelb, A. (ed.) : Applied Optimal Estimation, The M. I. T. Press, 1974.

なお，以下に挙げるproceedings等も参考となろう。

Proceedings of the International Hydrology Symposium, Fort Collins, Colorado, U. S. A., 1967.

Schulz, E.F. et al. (ed.) : Flood and Droughts, Proceedings of the Second International Symposium in Hydrology, Fort Collins, Colorado, U. S. A., 1972.

Morel−Seytoux, H. J. et al. (ed.) : Modeling Hydrologic Processes, Proceedings of the Third International Hydrology Symposium, on Theoretical and Applied Hydrology, Fort Collins, Collorado, U. S. A., 1977.

Morel−Seytoux, H. J. et al. (ed.) : Surface and Subsurface Hydrology, Proceedings of the Third International Hydrology Symposium, on Theoretical and Applied Hydrology, Fort Collins, Colorado, U. S. A., 1977.

The Progress of Hydrology, Proceedings of the First International Seminar for Hydrology, Urbana, Illinois, U. S. A., 1969.

Systems Approach to Hydrology, Proceedings of the First Bilateral U. S.−Japan Seminar in Hydrology, Honolulu, U. S. A., 1971.

Proceedings of the International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resources Systems, Tucson, Arizona, 1972.

Chao−Lin Chiu (ed.) : Stochastic Hydraulics, Proceedings of the First International Symposium on Stochastic Hydraulics, Pittsburgh, Pennsylvania, U. S. A., 1971.

Peder Hjorth et al. (ed.) : Hydraulic Problems Solved by Stochastic Methods, Proceedings of the Second International Symposium on Stochastic Hydraulics, Lund, Sweden, 1976.

Kikkawa, H. and Iwasa, Y. (ed.) : Proceedings of the Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, Tokyo, Japan, 1980.

The Hydrological Characteristics of River Basins, Proceedings of IAHS Symposium, Tokyo, Japan, 1975.

Unny, T. E. and McBean, E. A. (ed.) : Proceedings of International Symposium on Real−Time Operation of Hydrosystems, Waterloo, Ontario, Canada, 1981.